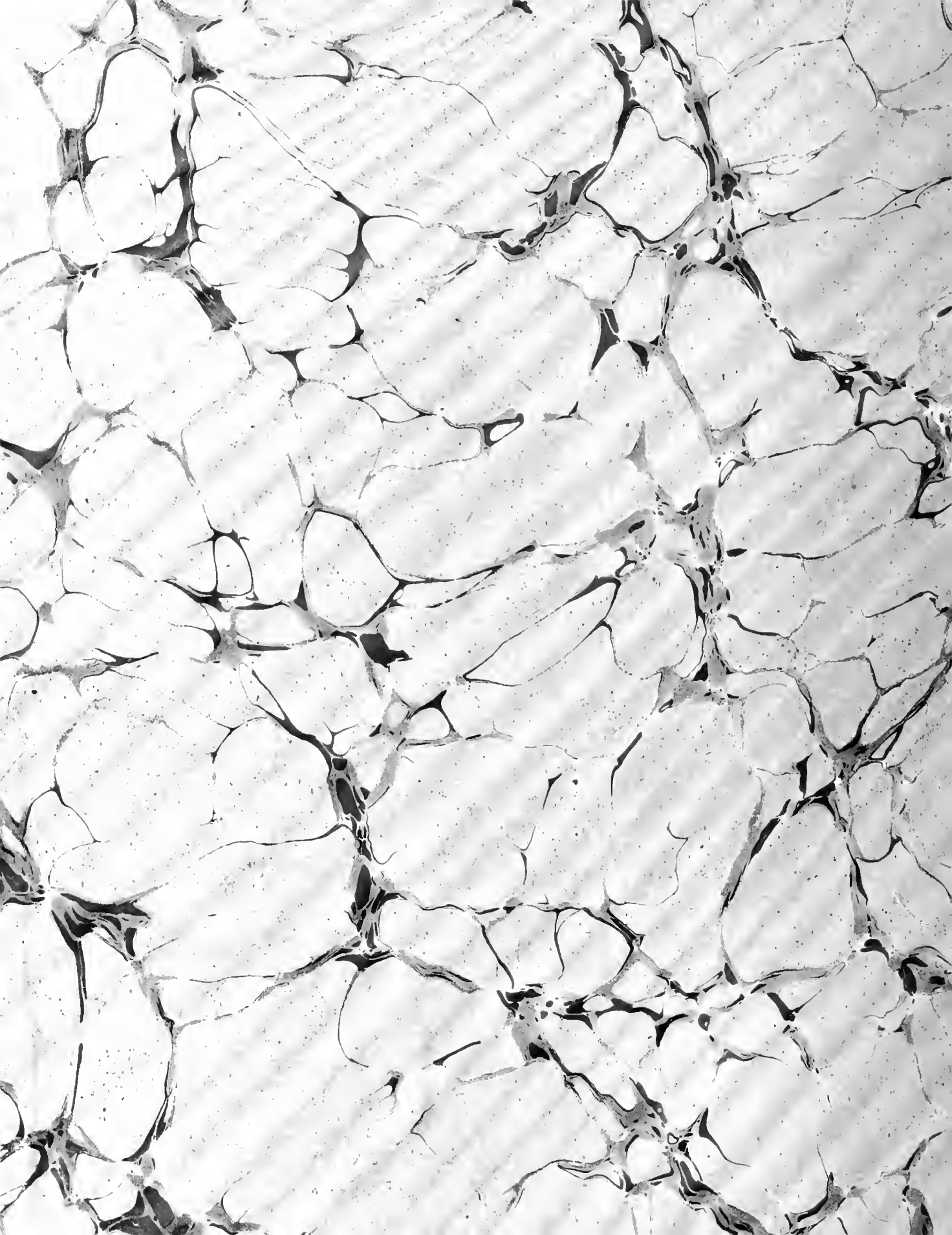
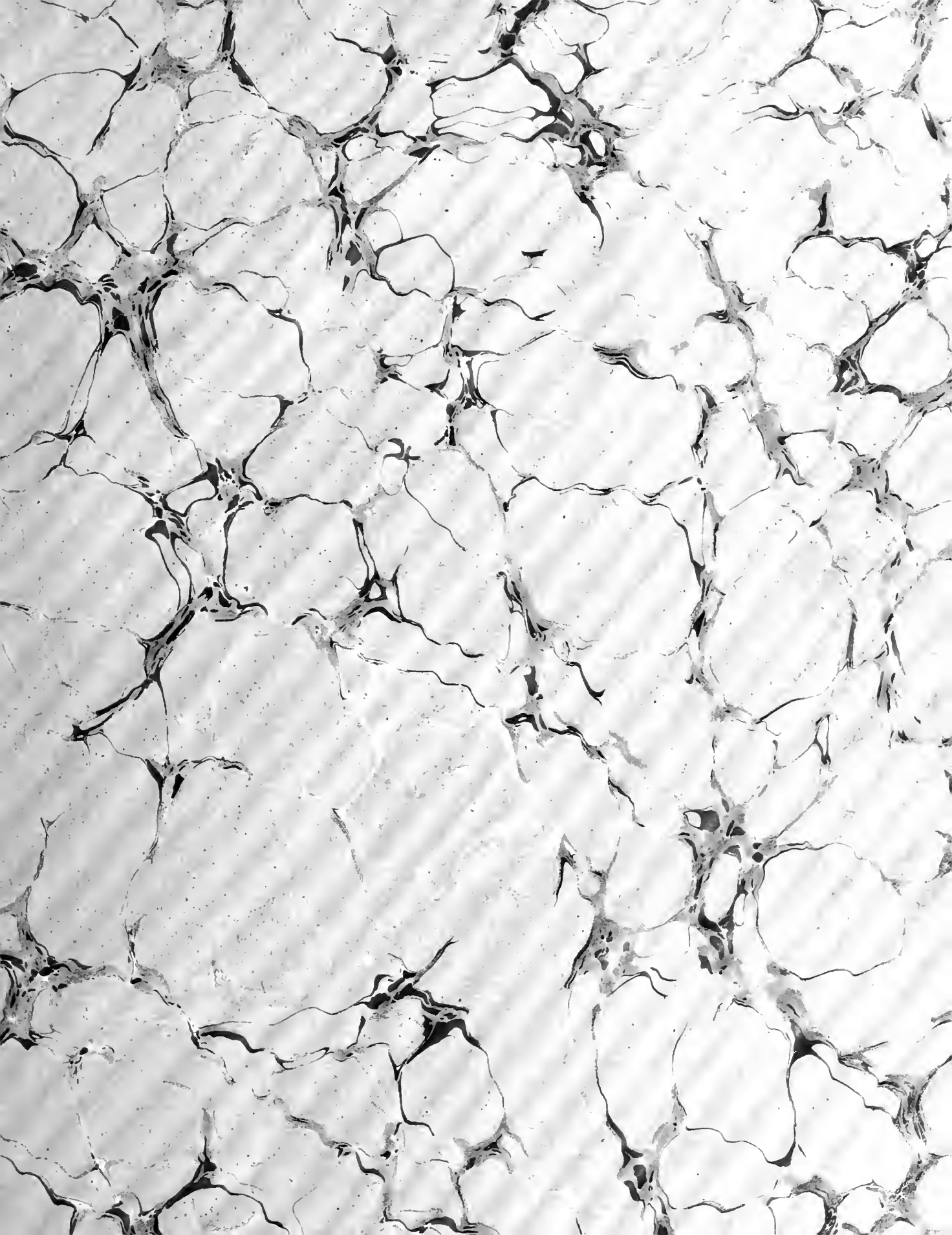




Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2journaldemat01liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME Ier. — ANNÉE 1856.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, nº 55.

1856

GA
1
J62.
S2A.2
E.1

20777
C.

AVERTISSEMENT.

J'ai fondé ce Journal à une époque où les moyens de publication pour les jeunes géomètres étaient beaucoup moins nombreux qu'aujourd'hui. On avait, il est vrai, le *Journal* de M. Crelle et celui de l'École Polytechnique; mais la *Correspondance* de M. Hachette, les *Annales* de M. Gergonne, le *Bulletin des Sciences* de M. Férussac, etc., avaient depuis plusieurs années cessé de paraître. Notre premier numéro a été celui de janvier 1836; et ce n'est que six mois après, au deuxième semestre, que l'Académie des Sciences a imaginé ses *Comptes rendus*, imités ensuite par la plupart des Sociétés savantes. Nous avons, depuis, donné chaque année un volume. Les vingt premiers volumes composent une première série. Celui que nous offrons maintenant au public ouvre une série nouvelle. A ce sujet, nous répéterons ce que nous avons déjà dit à la fin du tome XX : « C'est pour la commodité seule » de la librairie que nous avons fait de nos vingt premiers vo-

» lumes une série séparée : du reste, notre plan demeurera dans » la série suivante ce qu'il a été dès l'origine du recueil. Notre » cadre, on le sait, embrasse également les progrès de la science » et ceux des éléments. Nous continuerons à rechercher les meil- » leurs Mémoires, mais sans oser promettre qu'il ne s'en glissera » jamais de médiocres sous la responsabilité des géomètres qui » les signent. Enfin nous serons, comme par le passé, très-sobres » de remarques critiques et de leçons au public et aux auteurs. »

J. Liouville.

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME Ier.

Pages.

AVERTISSEMENT. v

Sur deux Mémoires de Poisson ; par M. *J. Liouville* 1

Sur des questions de minimum ; par M. *J. Liouville*. 7

Recherches dioptriques; par *C.-F. Gauss*. — Traduit par M. *A. Bravais*. 9

Note de dioptrique; par M. *A. Bravais*. 44

Résumé succinct des formules de Gauss sur la théorie des lunettes, et leur application à la démonstration des propriétés de l'anneau oculaire ; par M. *A. Bravais*. 51

Récapitulation très-succincte des recherches algébriques faites sur la théorie des effets mécaniques de la chaleur par différents auteurs ; par M. *F. Reech*. 58

Sur une propriété des formes quadratiques à déterminant positif; par M. *Lejeune-Dirichlet*. 76

Sur un théorème relatif aux séries ; par M. *G. Lejeune-Dirichlet*. 80

Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples, et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions *gamma* de Legendre; par M. *J. Liouville*. 82

Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes ; par M. *de Saint-Venant*. 89

Extension d'un théorème de calcul intégral; par M. *J. Liouville*. 190

Les Porismes d'Euclide ; par M. *Ch. Housel*. 193

Sur l'équation $t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4m$ [Extrait d'une Lettre de M. *Lejeune-Dirichlet* à M. Liouville]. 210

Note sur les arcs de cercle dont la tangente est rationnelle; par M. *E. Prouhet*. . 215

Sur la surface engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure; par M. *A.-H. Curtis*. 223

Sur la représentation des nombres par la forme quadratique $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$; Note de M. *J. Liouville*. 230

Sur les fonctions elliptiques [Note rédigée par M. *Sturm* d'après un Mémoire de M. *Despeyrous*]. 231

Du frottement considéré comme cause de mouvements vibratoires ; par M. *Duhamel*. 234

Mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps; par M. *J. Liouville*. 248

De la surface développable passant par une courbe donnée quelconque, et qui, par son développement, transformerait cette courbe en un arc de cercle de rayon donné ; par M. *H. Molins*. 265

Pages

Note sur les facteurs égaux de polynômes entiers; par M. *Ostrogradski* 287

Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'intégrales multiples; par M. *J. Liouville*. 289

Note sur une équation aux différences finies partielles; par M. *J. Liouville*. . . . 295

Expression remarquable de la quantité qui, dans le mouvement d'un système de points matériels à liaisons quelconques, est un minimum en vertu du principe de la moindre action; par M. *J. Liouville*. 297

Sur la réflexion totale de la lumière extérieurement à la surface des cristaux biréfringents; par M. *H. de Senarmont*. 305

Mémoire sur quelques formules générales d'analyse; par M. *E. Prouhet*. 321

Sur la théorie générale des équations différentielles; par M. *J. Liouville*. 345

Sur les sommes de diviseurs des nombres; par M. *J. Liouville*. 349

Sur l'équation $1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m$; par M. *J. Liouville*. 351

Sur la détermination des valeurs moyennes dans la théorie des nombres; par M. *Lejeune-Dirichlet*. — Traduit de l'allemand par M. *Jules Houel*. 353

Sur un problème relatif à la division; par M. *Lejeune-Dirichlet*. — Traduit par M. *Jules Houel*. 371

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}\right)$ où $\alpha<1$; par M. *V.-A. Lebesgue*. 377

Note sur le gyroscope de M. Foucault; par M. *J. Bertrand*. 379

Note sur les fonctions de quatre et de cinq lettres; par M. *James Cockle*. 383

Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli; par M. *Léopold Kronecker*. 385

Sur une formule de Gauss; par M. *Léopold Kronecker*. 392

Démonstration d'un théorème de M. Kummer; par M. *Léopold Kronecker*. . . . 396

Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1=0$, où n désigne un nombre premier; par M. *Léopold Kronecker*. 399

Sur la réduction des formes quadratiques définies positives à coefficients réels quelconques. Démonstration du théorème de Seeber sur les réduites des formes ternaires; par M. *V.-A. Lebesgue*. 401

Mode de construction et de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points; par M. *Ernest de Jonquières*. 411

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-et^2)^{\mu+1}}$; par M. *J. Liouville*. 421

Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité; par le Père *M. Jullien*, *S. J.* 425

Démonstration nouvelle d'une formule de M. William Thomson; par M. *J. Liouville*. 445

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

DEUX MÉMOIRES DE POISSON;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. L'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \tag{1}$$

sur laquelle repose essentiellement la théorie de la propagation du son dans les milieux gazeux, et à laquelle on ramène l'équation générale, à coefficients constants,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathrm{A}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mathrm{B}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \mathrm{C}\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2\,\mathrm{D}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + \text{etc.},$$

a été donnée en 1819 par Poisson (*Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, tome III. C'est le volume pour 1818, mais le Mémoire n'a été lu à l'Académie que le 19 juillet 1819). Poisson a trouvé que l'équation (1) est satisfaite en prenant

$$\varphi = \frac{t}{4\pi}\int\int d\sigma\, \mathrm{F}(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\, t\int\int d\sigma f(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)\right],$$

où $d\sigma$ désigne l'élément d'une surface sphérique de rayon 1, et $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les cosinus des angles que la droite menée du centre de la

sphère à cet élément fait avec les trois axes coordonnés des x, y, z. Ces trois cosinus étant liés entre eux par l'équation de condition

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on peut remplacer les deux angles β, γ par un angle unique η, en posant

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\eta, \quad \cos\gamma = \sin\alpha\sin\eta :$$

on a alors

$$d\sigma = \sin\alpha\, d\alpha\, d\eta,$$

et les intégrations marquées dans la valeur de φ doivent être étendues de $\eta = 0$ à $\eta = 2\pi$, et de $\alpha = 0$ à $\alpha = \pi$. On reconnaît de plus que l'expression de φ et celle de $\frac{d\varphi}{dt}$ qui s'en déduit, donnent

$$(2) \qquad \varphi = f(x, y, z) \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z) \text{ pour } t = 0;$$

et comme t représente le temps, on en conclut que les fonctions arbitraires f, F sont les valeurs initiales de φ et de sa dérivée.

2. Les deux méthodes que Poisson a données au commencement et à la fin de son Mémoire pour arriver à ce résultat remarquable, sont fondées sur la considération des séries. Le résultat une fois obtenu, Poisson l'a vérifié à *posteriori* par un calcul rigoureux. J'aurais à présenter sur l'ensemble du Mémoire des remarques dignes, je crois, d'intérêt. Mais je les ajourne, et pour le moment j'ai surtout en vue un point d'histoire assez curieux. Je vais montrer qu'une formule obtenue par Poisson dès 1807 (dans un Mémoire imprimé au 14ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique : voir* pages 334 à 338) aurait pu, j'allais dire aurait *dû*, conduire l'illustre auteur à la belle intégrale qu'il n'a donnée qu'en 1819, et qui dès lors s'offrait à lui comme conséquence immédiate d'un calcul fort simple.

En substituant, en effet, des coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires, puis effectuant une double intégration par rapport aux angles, après avoir multiplié les deux membres par l'élément sphérique de rayon 1, $d\sigma$, Poisson trouve que le produit du rayon vecteur et de l'intégrale double $\iint \varphi\, d\sigma$ ne dépend plus que de l'équation

a deux termes rencontrée d'abord par d'Alembert dans le problème des cordes vibrantes. Poisson observe d'ailleurs que l'origine des coordonnées, d'où part le rayon vecteur, est arbitraire. En divisant donc par 4π l'intégrale ci-dessus, on aura la moyenne des valeurs de φ correspondantes aux divers éléments de la surface d'une sphère de rayon quelconque, ayant son centre en un point quelconque de l'espace; et pour en déduire la valeur même de φ en ce point, il suffira de prendre le rayon infiniment petit. Cela étant, je présenterai le calcul comme il suit, en en tirant la conclusion que Poisson a laissé échapper.

Dans la fonction φ de t, x, y, z qui vérifie l'équation (1), et qu'on suppose continue et bien déterminée pour toutes les valeurs réelles de x, y, z, t, remplaçons x, y, z par $x+\rho, y+\mu, z+\nu$, et désignons par Φ la valeur que φ prend alors, en sorte que

$$\Phi = \varphi(t, x+\rho, y+\mu, z+\nu).$$

L'équation (1) se change en celle-ci :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + \frac{d^2\Phi}{d\mu^2} + \frac{d^2\Phi}{d\nu^2}. \tag{3}$$

Substituons aux coordonnées rectangles ρ, μ, ν des coordonnées polaires en faisant

$$\rho = r\cos\alpha, \quad \mu = r\sin\alpha\cos\eta, \quad \nu = r\sin\alpha\sin\eta :$$

r est naturellement ici le rayon vecteur mené du point (x, y, z) au point $(x+\rho, y+\mu, z+\nu)$. On a

$$\Phi = \varphi(t, x+r\cos\alpha, y+r\sin\alpha\cos\eta, z+r\sin\alpha\sin\eta),$$

ou si l'on veut, pour plus de symétrie,

$$\Phi = \varphi(t, x+r\cos\alpha, y+r\cos\beta, z+r\cos\gamma).$$

Quand $r=0$, Φ se réduit à φ. Quand $t=0$, φ se réduit à $f(x, y, z)$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ à $F(x, y, z)$; on a donc alors, r restant quelconque,

$$\Phi = f(x+r\cos\alpha, y+r\cos\beta, z+r\cos\gamma),$$

et

$$\frac{d\Phi}{dt} = F(x+r\cos\alpha, y+r\cos\beta, z+r\cos\gamma).$$

Par l'introduction des coordonnées polaires dans l'équation (3), cette équation devient

$$(4) \qquad \frac{d^2.r\Phi}{dt^2} = \frac{d^2.r\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r\sin\alpha}\frac{d\left(\sin\alpha\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)}{d\alpha} + \frac{1}{r\sin^2\alpha}\frac{d^2\Phi}{d\eta^2};$$

multipliant les deux membres par $\sin\alpha\, d\alpha\, d\eta$ ou $d\sigma$, et intégrant entre les limites $\eta = 0$, $\eta = 2\pi$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, on tire de là sans difficulté

$$(5) \qquad \frac{d^2.r\lambda}{dt^2} = \frac{d^2.r\lambda}{dr^2},$$

en posant, pour abréger,

$$(6) \qquad \lambda = \int\int \Phi\, d\sigma.$$

On a donc nécessairement

$$r\lambda = \psi(t+r) + \theta(t-r),$$

ou plutôt

$$(7) \qquad r\lambda = \psi(t+r) - \psi(t-r),$$

puisque le produit $r\lambda$ s'annulant pour $r = 0$, il faut que

$$\theta(t) = -\psi(t).$$

En différentiant l'équation (7) par rapport à r, on en déduit

$$r\frac{d\lambda}{dr} + \lambda = \psi'(t+r) + \psi'(t-r).$$

Si donc on pose $r = 0$, ce qui réduit Φ à φ et λ à $4\pi\varphi$, il viendra

$$4\pi\varphi = 2\psi'(t).$$

Or la valeur de $2\psi'(t)$ se conclut des valeurs données $f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$ de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$. En effet, Φ et λ sont liées à φ, de telle manière que les valeurs de λ et $\frac{d\lambda}{dt}$ pour $t = 0$, se trouvent aussi

connues; ces valeurs sont respectivement

$$\int\int d\sigma f(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma)$$

et

$$\int\int d\sigma \,\mathrm{F}(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma).$$

Introduisez-les dans les formules

$$\frac{d.r\lambda}{dr} = \psi'(t + r) + \psi'(t - r)$$

et

$$r\frac{d\lambda}{dt} = \psi'(t + r) - \psi'(t - r),$$

après y avoir posé, bien entendu, $t = 0$, et vous aurez

$$\psi'(r) + \psi'(-r)$$
$$= \frac{d}{dr}\left[r\int\int d\sigma f(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma)\right]$$

et

$$\psi'(r) - \psi'(-r)$$
$$= r\int\int d\sigma \,\mathrm{F}(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma);$$

d'où, par voie d'addition,

$$2\psi'(r) = r\int\int d\sigma \,\mathrm{F}(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma)$$
$$+ \frac{d}{dr}\left[r\int\int d\sigma f(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma)\right].$$

De cette valeur de $2\psi'(r)$ résultera celle de $2\psi'(t)$ en remplaçant r par t. L'équation

$$4\pi\varphi = 2\psi'(t)$$

nous fournira donc finalement la valeur de φ, savoir

$$\varphi = \frac{t}{4\pi}\int\int d\sigma \,\mathrm{F}(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[t\int\int d\sigma f(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)\right],$$

c'est-à-dire l'intégrale de Poisson, que cet illustre géomètre aurait pu obtenir ainsi dès ses premières recherches, tandis qu'il n'y est arrivé que beaucoup plus tard et par d'autres méthodes. Elle se présente ici comme la seule solution possible de l'équation (1), les conditions (2) ayant lieu.

On vérifie aisément, comme on sait, qu'en effet cette valeur de φ rend l'équation (1) identique, quelles que soient les fonctions f et F. Le calcul déjà si simple que Poisson a donné pour cet objet, dans son Mémoire de 1819, peut encore être abrégé. Remarquons en passant que si de tels calculs prouvent très-bien que la valeur de φ satisfait à l'équation indéfinie (1) et aux équations définies (2), ils ne démontrent pas qu'il soit impossible de remplir les mêmes conditions avec une autre valeur de φ, également continue et bien déterminée, mais numériquement différente. Cette impossibilité (qu'on peut au reste établir de différentes manières et qui découle d'ailleurs de la nature dynamique du problème que l'équation (1) est destinée à résoudre) ressort au contraire d'elle-même et nécessairement de la méthode développée ci-dessus d'après le Mémoire de 1807. Mais je n'insiste pas sur ces détails. Le but historique que je me proposais est atteint maintenant.

SUR

DES QUESTIONS DE MINIMUM;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soient MT et NS deux droites fixes tangentes aux points M et N à une ellipse donnée, et PQ une troisième tangente inscrite entre les deux autres, mais mobile, en sorte que son point de contact R puisse prendre entre M et N toutes les positions qu'on voudra.

La considération de la portion polygonale, circonscrite à l'ellipse, que forment les trois droites MP, PQ, QN, donne lieu à trois questions de minimum relativement à la position de la tangente mobile. On peut demander : 1° que la somme des trois droites MP + PQ + QN soit un minimum; 2° que la droite PQ soit séparément un minimum sans qu'on ait à s'inquiéter des deux autres; 3° qu'au contraire, la somme de celles-ci, MP + QN, soit un minimum.

J'ai développé la solution de ces trois questions dans les cours du Collége de France, au premier semestre de l'année scolaire 1851-1852, en me servant d'une méthode fondée sur l'emploi des coordonnées elliptiques dont la théorie faisait précisément l'objet du cours. Pour le premier problème, on arrive au théorème connu de M. Chasles, que les deux points P, Q doivent, pour le minimum, appartenir à une même ellipse homofocale à l'ellipse donnée. Dans le second problème où c'est la droite PQ qui doit être un minimum, on trouve que les points P et Q doivent appartenir à un cercle concentrique à l'ellipse, ou, si l'on veut, être à égale distance du centre de cette ellipse. Enfin, pour le troisième problème, il faut les placer sur une cassinoïde homofocale à l'ellipse donnée.

On sait que, pour résoudre la première question, M. Chasles ne s'est servi que de la géométrie pure; M. Paul Serret (un de mes auditeurs au Collége de France) a trouvé aussi pour les deux autres une démonstration géométrique des résultats que j'avais obtenus. La mé-

thode analytique que j'ai suivie a l'avantage de s'étendre d'elle-même aux questions analogues qu'on peut se proposer sur l'ellipsoïde en remplaçant l'ellipse par une ligne de courbure et les trois tangentes rectilignes par trois tangentes géodésiques.

Je terminerai en extrayant des *Comptes rendus* de notre Académie (t. XXII, p. 893, séance du 1er juin 1846) les lignes suivantes, qui ont une liaison intime avec l'objet de cette Note :

« M. Liouville communique les théorèmes suivants, concernant les » lignes géodésiques et les lignes de courbure de l'ellipsoïde :

» I. Parmi tous les polygones *géodésiques*, d'un nombre de côtés » donné, qu'on peut circonscrire à une ligne de courbure donnée aussi » sur un ellipsoïde, celui qui offre le périmètre minimum a tous ses » sommets sur une même ligne de courbure déterminée, le premier » sommet pouvant être pris du reste à volonté en un point quelconque » de cette dernière ligne.

» II. De même, les côtés du polygone de périmètre maximum, in- » scrit à une ligne de courbure donnée, sont tous tangents à une » seconde ligne de courbure.

» Il n'y a là, dit M. Liouville, qu'une extension très-simple de deux » théorèmes que M. Chasles avait démontrés pour les ellipses planes » et sphériques; et c'est à la demande de M. Chasles lui-même que » j'ai fait le calcul facile qui l'opère, en partant des formules, aujour- » d'hui si connues, sur lesquelles repose la théorie analytique des » lignes les plus courtes pour l'ellipsoïde. »

RECHERCHES DIOPTRIQUES,

PAR C.-F. GAUSS.

(Memoire présenté à la Societe royale de Gœttingue, le 10 décembre 1840, imprimé dans les *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, tome I).

TRADUIT PAR M. A. BRAVAIS [*].

La considération de la marche de la lumière à travers les lentilles, dans le cas d'une faible inclinaison des rayons sur l'axe, a conduit les géomètres à des résultats d'une élégance remarquable, mais qui, malgré les recherches de Cotes, Euler, Lagrange et Mobius, n'ont point encore complétement épuisé la question. La circonstance que l'épaisseur des lentilles se trouve négligée, dans les travaux de ces mathématiciens, leur ôte le caractère d'une rigueur absolue, et quoique, dans certains cas, l'hypothèse des épaisseurs infiniment petites simplifie beaucoup les formules, dans plusieurs autres on peut, sans sacrifier la simplicité des lois théoriques, tenir compte de la cause d'erreur que nous venons d'indiquer. Déjà cette hypothèse affecte d'une manière fâcheuse les premiers énoncés de la dioptrique, et entre autres la définition de la distance focale que la plupart des auteurs comptent à partir du centre de la lentille, en ajoutant que son épaisseur peut être considérée comme infiniment petite. Pour les lentilles de dimensions finies que l'on peut avoir à employer, il en résulte, dans la valeur de la distance focale, une indétermination de même ordre que l'épaisseur de la lentille. D'autres fois, on compte la distance focale, soit de la surface antérieure, soit de la surface postérieure, soit du milieu de l'intervalle

[*] Cet article, qui convient essentiellement au present Journal, a déjà paru dans les *Annales de Chimie et de Physique;* nous le reproduisons ici avec l'assentiment de M. Bravais, en y joignant une Note que ce savant professeur avait insérée aussi dans le Recueil cité, et une Note nouvelle tirée de ses leçons à l'Ecole Polytechnique.

(J. L.)

qui les sépare, soit aussi de son centre optique, ou bien encore on la détermine d'après les rapports de grandeur existant entre un objet très-éloigné et son image, mode de détermination qui, d'ailleurs, est plus convenable que tous les autres.

On verra, dans les recherches suivantes, que la considération de l'épaisseur de la lentille n'ôte point aux formules leur simplicité première, pourvu que l'on se borne au cas des rayons très-peu inclinés sur l'axe, en négligeant l'aberration de sphéricité.

ARTICLE I. — On prendra, pour fixer la position des divers points du système que nous allons avoir à considérer, trois axes rectangulaires, dont l'un sera l'axe commun de toutes les surfaces réfringentes successives; les abscisses x se compteront sur cet axe, dans le sens même de la marche de la lumière, et à partir d'un point arbitrairement choisi.

Considérons d'abord l'effet d'une première réfraction, et supposons que le quotient de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n'}$ représente le quotient du sinus de l'angle que fait le rayon avec la normale dans le premier milieu par le sinus de l'angle avec la normale dans le second milieu. Nommons M le centre de la première surface sphérique réfringente, N le point où elle est rencontrée par l'axe, et représentons par les mêmes lettres les abscisses de ces deux points. Soit, de plus, $r = \mathrm{M} - \mathrm{N}$, r étant la valeur algébrique du rayon de la surface réfringente; enfin, soient P le point où un rayon lumineux voisin de l'axe vient percer cette surface, et θ l'angle aigu que forme la droite MP avec l'axe.

On peut écrire les deux équations de la trajectoire du rayon incident, sous la forme

$$y = \frac{\beta}{n}(x - \mathrm{N}) + b,$$

$$z = \frac{\gamma}{n}(x - \mathrm{N}) + c;$$

celles du rayon réfracté, sous la forme

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - \mathrm{N}) + b',$$

$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \mathrm{N}) + c'.$$

Il s'agit de trouver les relations qui lient β', γ', b', c' à β, γ, b, c.

Pour le point P, on a

$$x = \mathrm{N} + r(1 - \cos\theta),$$

et, comme ce point appartient également au rayon incident et au rayon réfracté, on aura

$$\frac{\beta}{n} r(1 - \cos\theta) + b = \frac{\beta'}{n'} r(1 - \cos\theta) + b'.$$

Mais β, β', θ, sont des infiniment petits du premier ordre; on aura donc, aux grandeurs près du troisième ordre,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} b' = b, \\ \text{et de même} \\ c' = c. \end{array} \right.$$

Soit Q le point où le rayon incident, prolongé s'il le faut, vient percer le plan mené par M normalement à l'axe; soit Q′ le point de rencontre du rayon réfracté avec le même plan : les trois points M, Q, Q′, étant tous les trois situés dans le plan d'incidence, seront en ligne droite. Si l'on désigne par λ, λ' les angles que la droite de jonction de ces trois points fait avec PQ et avec PQ′, les quantités MQ sin λ, MQ′ sin λ' représenteront les perpendiculaires abaissées de M sur PQ et PQ′, et devront être entre elles dans le rapport des sinus d'incidence et de réfraction, c'est-à-dire comme $\frac{1}{n}$ est à $\frac{1}{n'}$: d'où l'on déduit

$$\mathrm{MQ}' = \frac{n \cdot \mathrm{MQ} \sin\lambda}{n' \sin\lambda'}.$$

Or, au point Q, on a

$$y = b + \frac{\beta r}{n},$$

$$z = c + \frac{\gamma r}{n};$$

au point Q′,

$$y = b' + \frac{\beta' r}{n'},$$

$$z = c' + \frac{\gamma' r}{n'};$$

et, comme les coordonnées y, z du point Q doivent être avec les coor-

données homologues de Q′ dans le même rapport que MQ avec MQ′, on aura, rigoureusement,

$$b' + \frac{\beta' r}{n'} = \frac{n \sin \lambda}{n' \sin \lambda'} \left(b + \frac{\beta r}{n} \right),$$
$$c' + \frac{\gamma' r}{n'} = \frac{n \sin \lambda}{n' \sin \lambda'} \left(c + \frac{\gamma r}{n} \right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\beta' = \frac{nb + \beta r}{r} \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda'} - \frac{n' b'}{r},$$
$$\gamma' = \frac{nc + \gamma r}{r} \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda'} - \frac{n' c'}{r}.$$

Mais, d'autre part, λ, λ' diffèrent très-peu d'un angle droit, et $\frac{\sin \lambda}{\sin \lambda'}$ ne différera de l'unité que d'une quantité du deuxième ordre; ainsi l'on aura, au troisième ordre près,

$$(2) \quad \begin{cases} \beta' = \beta - \dfrac{n' - n}{r} b = \beta + \dfrac{n' - n}{\mathrm{N} - \mathrm{M}} b, \\ \gamma' = \gamma - \dfrac{n' - n}{r} c = \gamma + \dfrac{n' - n}{\mathrm{N} - \mathrm{M}} c. \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) font connaître la route du rayon réfracté et résolvent le problème.

Ces formules peuvent s'appliquer au cas de la réflexion de la lumière, en y supposant $n' = -n$; la même remarque peut être étendue aux considérations qui vont suivre.

Article II. — Pour résoudre la question générale de la détermination de la marche de la lumière après $\mu + 1$ réfractions, j'adopterai les notations suivantes :

N^0, N', N'',..., N^{μ} seront les points où l'axe est coupé par les $\mu + 1$ surfaces réfringentes, et ces mêmes lettres représenteront aussi les abscisses de ces points;

M^0, M', M'',..., M^{μ} seront les centres de ces mêmes surfaces, et représenteront aussi les abscisses de ces centres;

n^0, n', n'',..., $n^{\mu+1}$ seront des nombres proportionnels aux indices de réfraction principaux des milieux successifs.

On sait que ces nombres représentent les vitesses de la lumière dans ces divers milieux, si l'on adopte le système de l'émission, et les inverses de ces vitesses, si l'on adopte le système des ondulations.

Dans le cas où le dernier milieu serait de même nature que le premier, on aurait

$$n^{\mu+1} = n^{\circ}.$$

Les équations de la route initiale du rayon lumineux étant écrites sous la forme

$$y = \frac{\beta^{\circ}}{n^{\circ}}(x - \mathrm{N}^{\circ}) + b^{\circ},$$

$$z = \frac{\gamma^{\circ}}{n^{\circ}}(x - \mathrm{N}^{\circ}) + c^{\circ},$$

celles relatives à la route de ce rayon, lorsqu'il aura subi sa première réfraction, seront

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - \mathrm{N}^{\circ}) + b^{\circ},$$

$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \mathrm{N}^{\circ}) + c^{\circ},$$

que l'on peut aussi mettre [*] sous la forme

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - \mathrm{N}') + b',$$

$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \mathrm{N}') + c'.$$

De même, après la seconde réfraction, ces équations deviendront

$$y = \frac{\beta''}{n''}(x - \mathrm{N}') + b',$$

$$z = \frac{\gamma''}{n''}(x - \mathrm{N}') + c',$$

---

[*] En faisant

$$b^{\circ} + \frac{\beta'}{n'}(\mathrm{N}' - \mathrm{N}^{\circ}) = b',$$

$$c^{\circ} + \frac{\gamma'}{n'}(\mathrm{N}' - \mathrm{N}^{\circ}) = c'.$$

A. B.

et l'on pourra écrire

$$y = \frac{\beta''}{n''}(x - \mathrm{N}'') + b'',$$
$$z + \frac{\gamma''}{n''}(x - \mathrm{N}'') + c''.$$

Cette série d'équations continuera jusqu'à la dernière trajectoire, route finale du rayon émergent, dont je représenterai les équations par

$$y = \frac{\beta^{\mu+1}}{n^{\mu+1}}(x - n^{\mu}) + b^{\mu},$$
$$z = \frac{\gamma^{\mu+1}}{n^{\mu+1}}(x - \mathrm{N}^{\mu}) + c^{\mu},$$

et, en désignant

$$\beta^{\mu+1},\ \gamma^{\mu+1},\ n^{\mu+1},\ \mathrm{N}^{\mu},\ b^{\mu},\ c^{\mu},\quad \text{par}\quad \beta^{*},\ \gamma^{*},\ n^{*},\ \mathrm{N}^{*},\ b^{*},\ c^{*},$$

on aura

$$y = \frac{\beta^{*}}{n^{*}}(x - \mathrm{N}^{*}) + b^{*},$$
$$z = \frac{\gamma^{*}}{n^{*}}(x - \mathrm{N}^{*}) + c^{*}.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$(3)\begin{cases} \dfrac{\mathrm{N}' - \mathrm{N}^{\circ}}{n'} = t', \quad \dfrac{\mathrm{N}'' - \mathrm{N}'}{n''} = t'', \quad \dfrac{\mathrm{N}''' - \mathrm{N}''}{n'''} = t''', \ldots, \dfrac{\mathrm{N}^{\mu} - \mathrm{N}^{\mu-1}}{n^{\mu}} = t^{\mu}, \\ \dfrac{n' - n^{\circ}}{\mathrm{N}^{\circ} - \mathrm{M}^{\circ}} = u^{\circ}, \quad \dfrac{n'' - n'}{\mathrm{N}' - \mathrm{M}'} = u', \quad \dfrac{n''' - n''}{\mathrm{N}'' - \mathrm{M}''} = u'', \ldots, \dfrac{n^{\mu+1} - n^{\mu}}{\mathrm{N}^{\mu} - \mathrm{M}^{\mu}} = u^{\mu}, \end{cases}$$

et représentons t^{μ} et u^{μ} par t^{*}, u^{*}.

Nous aurons, en vertu des équations (2) de l'article I, et de la note de la page précédente,

$$\beta' = \beta^{\circ} + u^{\circ} b^{\circ},$$
$$\gamma' = \gamma^{\circ} + u^{\circ} c^{\circ},$$
$$b' = b^{\circ} + t' \beta',$$
$$c' = c^{\circ} + t' \gamma'.$$

Nous aurons de même, pour le rayon qui vient de subir la deuxième réfraction,

$$\begin{aligned}\beta'' &= \beta' + u'b',\\ \gamma'' &= \gamma' + u'c',\\ b'' &= b' + t''\beta'',\\ c'' &= c' + t''\gamma'',\end{aligned}$$

et ainsi de suite, pour les autres branches successives, jusqu'à la branche finale à laquelle se rapportent les coefficients β^*, γ^*, b^*, c^*. De la manière dont les quantités β°, b°, β', b', β'', b'', ..., dérivent les unes des autres, il résulte que β^*, b^* sont exprimées linéairement en fonction de β°, b°, et il en est de même pour γ^*, c^*, en fonction de γ°, c°. Ainsi l'on pourra écrire

$$(4)\qquad \begin{cases} b^* = gb^\circ + h\beta^\circ,\\ \beta^* = kb^\circ + l\beta^\circ,\end{cases}$$

g, h, k, l étant certaines combinaisons de termes dépendant de u°, t', u', t'', u'', etc.

Si, maintenant, nous adoptons les symboles établis par Euler (*Commentarii Novi Academiæ Petropolitanæ*, tome IX), il viendra

$$(5)\qquad \begin{cases} g = (u^\circ, t', u', t'', u'', \ldots, t^*),\\ h = (t', u', t'', u'', \ldots, t^*),\\ k = (u^\circ, t', u', t'', u'', \ldots, t^*, u^*),\\ l = (t', u', t'', u'', \ldots, t^*, u^*).\end{cases}$$

Pour l'intelligence de ces équations symboliques, il faut se rappeler qu'Euler désigne par

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= (a),\\ \mathrm{A}' &= (a, a'),\\ \mathrm{A}'' &= (a, a', a''),\\ \mathrm{A}''' &= (a, a', a'', a'''), \text{ etc.},\end{aligned}$$

les valeurs des quantités A, A', A'', A''', ..., qui se déduisent des équa-

tions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= a, \\ A' &= a'A + 1, \\ A'' &= a''A' + A, \\ A''' &= a'''A'' + A', \text{ etc.,} \end{aligned}$$

a, a', a'', a''',..., étant une série de quantités quelconques préalablement données [*].

La même loi de formation successive s'applique évidemment aux quantités c et γ; ainsi l'on a

$$(4) \qquad \begin{cases} c^* = gc^0 + h\gamma^0, \\ \gamma^* = kc^0 + l\gamma^0. \end{cases}$$

Les équations (3), (4), (5) résolvent la question proposée de la manière la plus générale.

ARTICLE III. — Euler a fait connaître les principales propriétés que possèdent les séries dont nous venons de parler. Les suivantes vont nous être utiles.

D'abord, on a toujours

$$\begin{aligned} &(a, a', a'', \ldots, a^\lambda)\,(a', a'', \ldots, a^{\lambda+1}) \\ &- (a, a', a'', \ldots, a^{\lambda+1})\,(a', a'', \ldots, a^\lambda) = \pm 1, \end{aligned}$$

le signe + devant être préféré si λ est impair, et le signe — dans le cas contraire.

---

[*] Il est clair que A, A', A'', etc., sont les numérateurs successifs des réduites de la fraction continue

$$a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \ddots}};$$

que $\frac{k}{l}$ est la dernière réduite de

$$a^0 + \cfrac{1}{t' + \cfrac{1}{u' \ldots + \cfrac{1}{t^* + \frac{1}{u^*}}}},$$

et que $\frac{g}{h}$ en est l'avant-dernière, toujours de rang pair. A. B.

Ensuite, on peut renverser l'ordre des quantités $a, a', a'', \ldots, a^{\lambda}$, sans troubler la valeur du terme correspondant, c'est-à-dire que l'on a

$$(a, a', a'', \ldots, a^{\lambda}) = (a^{\lambda}, a^{\lambda-1}, \ldots, a'', a', a).$$

On déduit de là

$$gl - hk = 1.$$

On en déduit aussi, en revenant de $b^*, \beta^*, c^*, \gamma^*$, à $b^o, \beta^o, c^o, \gamma^o, \ldots$ par les équations (4),

$$\begin{aligned} b^o &= lb^* - h\beta^*, \\ \beta^o &= -kb^* + g\beta^*, \\ c^o &= lc^* - h\gamma^*, \\ \gamma^o &= -kc^* - g\gamma^* \text{ [*]}. \end{aligned}$$

ARTICLE IV. — Soit P un point pris arbitrairement sur la route initiale du rayon incident, et soient ξ, η, ζ ses coordonnées; on a

$$n^o\eta = \beta^o(\xi - N^o) + n^o b^o,$$

et, si l'on substitue à b^o et β^o leurs valeurs en b^*, β^*, on aura

$$n^o\eta = (g\beta^* - kb^*)(\xi - N^o) - n^o(h\beta^* - lb^*),$$

d'où l'on déduit

$$b^* = \frac{n^o\eta + [n^o h - g(\xi - N^o)]\beta^*}{n^o l - k(\xi - N^o)}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation en x, y de la route finale du rayon lumineux, c'est-à-dire en

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - N^*) + b^*.$$

---

[*] On pourrait aussi faire revenir le rayon lumineux dans un sens inverse; alors la série $t', t'', \ldots, t^{\mu}$ se change en $t^{\mu}, t^{\mu-1}, \ldots, t'$; la série $u^o, u', \ldots, u^{\mu-1}, u^{\mu}$, en $u^{\mu}, u^{\mu-1}, \ldots, u', u^o$; h et k conservent leurs valeurs, l et g s'échangent entre eux; en outre, à cause du changement de direction de l'axe des x positives, $\beta^o, \gamma^o, \beta^*, \gamma^*$ doivent changer de signe. A. B.

et faisons, pour abréger,

$$N^* - \frac{n^o h - g(\xi - N^o)}{n^o l - k(\xi - N^o)} n^* = \xi^*,$$

$$\frac{n^o \eta}{n^o l - k(\xi - N^o)} = \eta^* :$$

nous aurons

$$y = \eta^* + \frac{\beta^*}{n^*}(x - \xi^*)$$

pour l'équation en x, y de la route finale du rayon émergent.

Si nous opérions de même sur

$$n^o \zeta = \beta^o(\xi - N^o) + n^o c^o,$$

et si nous posions

$$\frac{n^o \zeta}{n^o l - k(\xi - N^o)} = \zeta^*,$$

nous aurions aussi

$$z = \zeta^* + \frac{\gamma^*}{n^*}(x - \zeta^*).$$

Nommons maintenant P* le point dont les coordonnées sont égales à ξ^*, η^*, ζ^*; il est clair que ce point sera toujours situé sur la route finale du rayon émergent, et, comme ses coordonnées ne dépendent pas des éléments b^o, β^o, c^o, γ^o, qui fixent la direction de la route initiale, mais seulement des coordonnées du point P, ainsi que de la position, de la forme et des pouvoirs réfringents des surfaces dirimantes, il en résulte que, P étant considéré comme un objet réel ou virtuel, P* en sera l'image.

Les points P, P*[*] sont situés dans un plan passant par l'axe des x, et le rapport de leurs distances à l'axe est celui de l'unité au nombre $\frac{n^o}{n^o l - k(\xi - N^o)}$: le signe positif ou négatif de cette expression indiquera si ces points sont situés du même côté de l'axe, ou de côtés opposés. Enfin, si l'on donne au point P une forme finie, mais très-petite, dans un plan normal à l'axe, il se formera en P* une image de

[*] Ces points forment deux foyers conjugués du système des lentilles. A. B.

forme analogue, droite ou renversée, selon que l'expression

$$\frac{n^0}{n^0 l - k(\xi - \mathrm{N}^0)} = g + \frac{k}{n^*}(\xi^* - \mathrm{N}^*)$$

sera positive ou négative.

ARTICLE V. — Si, au lieu de rapporter les équations des routes initiale et finale du rayon qui traverse le système aux points N^0, N^*, on les rapporte à deux autres points Q, Q^* situés sur ces mêmes branches, et dont les abscisses seront aussi représentées par Q, Q^*, on aura

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - \mathrm{Q}) + \mathrm{B},$$

$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - \mathrm{Q}) + \mathrm{C},$$

pour la route initiale du rayon, et

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - \mathrm{Q}^*) + \mathrm{B}^*,$$

$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - \mathrm{Q}^*) + \mathrm{C}^*,$$

pour sa route finale; les constantes B, C, B^*, C^* seront données par les équations

$$\mathrm{B} = b^0 - \frac{\mathrm{N}^0 - \mathrm{Q}}{n^0}\beta^0 = b^0 - \theta\beta^0,$$

$$\mathrm{C} = c^0 - \frac{\mathrm{N}^0 - \mathrm{Q}}{n^0}\gamma^0 = c^0 - \theta\gamma^0$$

où l'on a introduit, pour abréger, les auxiliaires θ, θ^*.

Si l'on porte, dans ces deux dernières équations, les valeurs de b^*, c^* tirées des équations (4), et si l'on y remplace b^0, c^0 par $\mathrm{B} + \theta\beta^0$, $\mathrm{C} + \theta\gamma^0$, on aura

$$\mathrm{B}^* = (g + \theta^* k)\,\mathrm{B} + (h + \theta g + \theta\theta^* k + \theta^* l)\,\beta^0,$$
$$\mathrm{C}^* = (g + \theta^* k)\,\mathrm{C} + (h + \theta g + \theta\theta^* k + \theta^* l)\,\gamma^0.$$

Les équations (4) donnent aussi les valeurs de β^*, γ^*, et, en y rem-

plaçant b^o, c^o par les valeurs ci-dessus, on aura

$$\beta^* = k\mathrm{B} + (l + k\theta)\beta^o,$$
$$\gamma^* = k\mathrm{C} + (l + k\theta)\gamma^o.$$

Donc, si l'on écrit

$$\mathrm{G} = g + \theta^* k,$$
$$\mathrm{H} = h + \theta g + \theta\theta^* h + \theta^* l,$$
$$\mathrm{K} = k,$$
$$\mathrm{L} = l + \theta k,$$

on aura

$$\mathrm{B}^* = \mathrm{GB} + \mathrm{H}\beta^o, \qquad \mathrm{C}^* = \mathrm{GC} + \mathrm{H}\gamma^o,$$
$$\beta^* = \mathrm{KB} + \mathrm{L}\beta^o, \qquad \gamma^* = \mathrm{KC} + \mathrm{L}\gamma^o.$$

Les coefficients G, H, K, L satisfont à l'équation

$$\mathrm{GL} - \mathrm{KH} = 1.$$

Pour établir la relation la plus simple possible entre les routes initiale et finale du rayon lumineux, il est convenable de choisir sur l'axe quatre points fixes, jouissant de propriétés remarquables. Nous nommerons E, E* les deux premiers de ces quatre points, ces lettres représentant aussi les abscisses de ces points.

Nous poserons

$$\mathrm{E} = \mathrm{N}^o - \frac{n^o(1-l)}{k},$$
$$\mathrm{E}^* = \mathrm{N}^* + \frac{n^*(1-g)}{k},$$

pour fixer la position de ces points, et nous en déduirons

$$\theta = \frac{1-l}{k}, \qquad \theta^* = \frac{(1-g)}{k},$$
$$\mathrm{G} = 1, \qquad \mathrm{H} = 0, \qquad \mathrm{K} = k, \qquad \mathrm{L} = 1.$$

Alors, les équations de la route initiale deviendront

$$y = \frac{\beta^o}{n^o}(x - \mathrm{E}) + \mathrm{B},$$
$$z = \frac{\gamma^o}{n^o}(x - \mathrm{E}) + \mathrm{C},$$

et celles de la route finale

$$y = \frac{\beta^\circ + kB}{n^*}(x - E^*) + B,$$

$$z = \frac{\gamma^\circ + kC}{n^*}(x - E^*) + C.$$

Il importe de remarquer que l'intersection du rayon initial avec le plan $x = E$, et l'intersection du rayon final avec le plan $x = E^*$, sont sur une même droite parallèle à l'axe.

On aura deux autres points remarquables F, F^*, en posant

$$F = N^\circ + \frac{n^\circ l}{k} = E + \frac{n^\circ}{k},$$

$$F^* = N^* - \frac{n^* g}{k} = E^* - \frac{n^*}{k};$$

on en déduit

$$\theta = -\frac{l}{k}, \qquad \theta^* = -\frac{g}{k},$$

$$G = o, \qquad H = -\frac{1}{k}, \qquad K = k. \qquad L = o.$$

Alors, les équations de la route initiale étant

$$y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - F) + B',$$

$$z = \frac{\gamma^\circ}{n^\circ}(x - F) + C',$$

celles de la route finale seront

$$y = \frac{kB'}{n^*}(x - F^*) - \frac{\beta^\circ}{k},$$

$$z = \frac{kC'}{n^*}(x - F^*) - \frac{\gamma^\circ}{k}.$$

Article VII. — Si, dans les équations de la route initiale rapportée au point E, on change β° en $\beta^\circ + kB$, γ° en $\gamma^\circ + kC$, n° en n^*, on obtient une droite passant par le même point, et parallèle à la route finale du rayon ; on obtiendrait le même résultat, en supposant que le rayon initial se brise au point où son abscisse est égale à E, en entrant

dans un milieu d'indice n^*, pourvu que l'on ait

$$r = \frac{n^* - n^o}{k},$$

r étant le rayon de la surface sphérique réfringente que nous faisons intervenir fictivement pour briser le rayon [*voyez* équations (2)].

Si donc on suppose que le rayon initial rencontre en E une surface réfringente de rayon égal à $\frac{n^* - n^o}{k}$, le rayon brisé ainsi obtenu aura la même direction que notre rayon final possède à partir du point E*.

Si le dernier milieu réfringent est le même que le premier milieu, ce qui arrive dans le cas le plus ordinaire, alors $n^* = n^o$, et il convient de supposer que le rayon a rencontré une lentille réfringente très-mince, de distance focale égale à $-\frac{n^o}{k}$ [*]; alors, la route qu'il prendra coïncidera, quant à sa direction, avec celle de notre rayon final, et l'on pourra le lui superposer en le transportant, tout d'une pièce, parallèlement à l'axe, d'un intervalle égal à E* — E.

L'importance des points E, E*, dans la théorie des lunettes, nous a engagé à leur donner un nom particulier, et à les désigner sous le nom de *points principaux de la lunette* : le point E sera le point principal de première espèce, le point E* le point principal de deuxième espèce. Nous nommerons *plans principaux de première et de deuxième espèce*, les plans menés par ces points normalement à l'axe.

Article VIII. — Considérons de même les points F, F*. Si, par le

---

[*] Car, en partant des équations (2), désignant par β'', γ'' ce que deviennent β', γ' lorsque le rayon rentre dans le premier milieu, et nommant M' la nouvelle valeur de M, on aura

$$\beta'' = \beta' + \frac{n - n'}{N - M'} b,$$

et, par suite,

$$\beta'' = \beta + \left(\frac{n' - n}{N - M} - \frac{n' - n}{N - M'}\right) b = \beta - \frac{n}{\rho} b,$$

ρ étant la distance focale principale de la lentille infiniment mince, positive si elle est convergente, négative dans le cas contraire. Il faudra donc supposer $-\frac{n}{\rho} = k$. A. B.

point F pris sur l'axe, on fait passer des rayons, on aura

$$B' = 0, \qquad C' = 0,$$

et les rayons émergents auront pour équation

$$y = -\frac{\beta^0}{k}, \qquad z = -\frac{\gamma^0}{k};$$

d'où l'on voit qu'ils seront parallèles à l'axe.

Nous appellerons ce point le *foyer principal de première espèce* du système de lentilles. De même, si l'on assujettit les rayons émergents à passer par le point F* situé sur l'axe, il faudra écrire $\beta^0 = 0$, $\gamma^0 = 0$, et l'équation des rayons incidents sera $y = B'$, $z = C'$, ce qui est l'équation d'un rayon parallèle à l'axe; d'où l'on voit que, réciproquement, tous les rayons parallèles à l'axe concourent, après leur sortie, en F*.

A cause de cette propriété, F* sera le *foyer principal de deuxième espèce*. Les plans normaux à l'axe, menés par ces points, seront les *plans focaux principaux de première et de deuxième espèce*.

Si le point F, départ des rayons, est pris hors de l'axe, sur le plan principal de première espèce, les rayons ne seront plus parallèles à l'axe; alors β^0 et γ^0 varieront seuls, et les rayons émergents cesseront d'être parallèles à l'axe, mais ils seront encore parallèles entre eux. Il en est de même pour les points du plan focal de deuxième espèce.

Article IX. — Au moyen de ces quatre plans auxiliaires, on peut facilement construire la route finale suivie par un rayon dont la route initiale est donnée.

Nommons (1) le point de rencontre du rayon initial avec le plan focal de première espèce, et (2) avec le plan principal de première espèce, et menons par F une parallèle à la droite (1) (2), qui rencontrera en (3) le plan principal de première espèce; menons par (2) une parallèle à l'axe qui rencontrera en (4) le plan principal de deuxième espèce, et par (3) une autre parallèle à l'axe qui rencontrera en (5) le plan focal de deuxième espèce. La droite (4) (5) ou (5) (4) sera la route finale du rayon qui aura traversé toutes les surfaces réfringentes.

On a, en effet, pour les valeurs des coordonnées de ces points :

	x	y	z
(1)	F	B′	C′
(2)	E	B	C
F	F	o	o
(3)	E	B — B′	C — C′
(4)	E*	B	C
(5)	F*	B — B′	C — C′

Il est évident que le rayon émergent passe par le point (4), d'après la remarque qui termine l'article VII. En outre, à cause de

$$y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{E}) + \mathrm{B}, \qquad y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{F}) + \mathrm{B}',$$

on a

$$\mathrm{B} - \mathrm{B}' = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(\mathrm{E} - \mathrm{F}) = -\frac{\beta^\circ}{k};$$

et, de même,

$$\mathrm{C} - \mathrm{C}' = \frac{\gamma^\circ}{n^\circ}(\mathrm{E} - \mathrm{F}) = -\frac{\gamma^\circ}{k}.$$

Or $-\frac{\beta^\circ}{k}$, $-\frac{\gamma^\circ}{k}$ sont les coordonnées du point de rencontre du rayon sortant avec le plan $x = \mathrm{F}^*$; ce point coïncide donc avec (5) [*].

Dans le cas ordinaire où $n^* = n^\circ$, on a

$$\mathrm{F}^* - \mathrm{E}^* = \mathrm{E} - \mathrm{F};$$

[*] On peut le voir, sans calcul, en observant que la route finale de F (3) doit percer le plan E* à l'extrémité de la parallèle à l'axe menée par (3) jusqu'à la rencontre de ce plan, de là, à cause des propriétés du foyer principal, continuer sa route jusqu'en (5) parallèlement à l'axe, et remarquant en outre que les rayons parallèles (1), (2) et F (3) doivent percer le plan F* au même point. A. B.

la construction se simplifie, le point (3) devient inutile, et, lorsque l'on a déterminé le point (4), on mène par ce point une parallèle à la ligne de jonction de (1) avec E.

Si le rayon incident, prolongé s'il le faut, passe par E, le rayon émergent sortira par E*, et dans le cas où $n^* = n^o$, il sortira parallèle à sa direction première. Un tel rayon est désigné sous le nom de *rayon principal* (Hauptstrahl), dans les lentilles simples.

On pourrait appeler *distances focales principales* du système, l'intervalle $F^* - E^* = -\frac{n^*}{k}$ et l'intervalle $E - F = -\frac{n^o}{k}$; toutefois nous restreindrons cette désignation au cas où le milieu final est le même que le milieu initial, c'est-à-dire au cas où l'on a $F^* - E^* = E - F$. Les deux distances focales ont alors la même valeur.

Nous considérons ces distances focales comme positives, celle de première espèce, si $E > F$, celle de deuxième espèce, si $F^* > E^*$.

ARTICLE X. — Nous avons vu dans l'article IV comment, connaissant les coordonnées ξ, η, ζ d'un point voisin de l'axe, on pouvait en déduire celles de son foyer conjugué ξ^*, η^*, ζ^*. Si, dans les valeurs de ξ^*, η^*, ζ^*, on remplace N^o, N^* par leurs valeurs en E, E*, on aura, après les transformations convenables,

$$\xi^* = E^* - \frac{n^*(E-\xi)}{n^* + k(E-\xi)},$$

$$\eta^* = \frac{n^o \eta}{n^o + k(E-\xi)},$$

$$\zeta^* = \frac{n^o \zeta}{n^o + k(E-\xi)}.$$

La première de ces équations peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{n^*}{\xi^* - E^*} + \frac{n^o}{E - \xi} = -k.$$

Si, aux points E, E*, on substitue les points F, F*, on aura de même

$$\xi^* = F^* + \frac{n^o \eta^*}{k^2(F-\xi)},$$

$$\eta^* = \frac{n^o \eta}{k(F-\xi)},$$

$$\zeta^* = \frac{n^o \zeta}{k(F-\xi)}.$$

Si l'on suppose que le milieu final est de même nature que le milieu initial, on posera $n^* = n^\circ$, et en écrivant

$$-\frac{n^*}{k} = -\frac{n^\circ}{k} = \varphi,$$

on aura

$$\frac{1}{\xi^* - \mathrm{E}^*} + \frac{1}{\mathrm{E} - \xi} = \frac{1}{\varphi},$$

$$(\xi^* - \mathrm{F}^*)(\mathrm{F} - \xi) = \varphi^2,$$

$$\eta^* = -\frac{\varphi\eta}{\mathrm{F} - \xi} = -\frac{\eta(\xi^* - \mathrm{F}^*)}{\varphi},$$

$$\xi^* = -\frac{\varphi\zeta}{\mathrm{F} - \xi} = -\frac{\zeta(\xi^* - \mathrm{F}^*)}{\varphi}\,[*].$$

Article XI. — Lorsque l'on a $k = 0$, les points E, E*, F, F* s'éloignent à l'infini, et l'on ne peut plus se servir des formules précédentes.

Supposons que les équations de la route initiale soient

$$y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{N}^\circ) + b^\circ,$$

$$z = \frac{\gamma^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{N}^\circ) + c^\circ,$$

celle de la route finale

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + b^*,$$

$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + c^*.$$

A cause des formules (4), nous aurons

$$y = \frac{l\beta^\circ}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + gb^\circ + h\beta^\circ,$$

$$z = \frac{l\gamma^\circ}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + gc^\circ + h\gamma^\circ.$$

---

[*] On peut écrire $\frac{\mathrm{F}^* - \xi^*}{\varphi} = \frac{\eta^*}{\eta} = \frac{\zeta^*}{\zeta} = \frac{\varphi}{\xi - \mathrm{F}}$: cette forme résume toute la théorie des foyers conjugués. A. B.

et, si nous posons dans ces dernières équations,

$$N^* - \frac{hn^*}{l} = N^* - ghn^* = N^{**},$$

elles prennent la forme

$$y = \frac{l\beta^o}{n^*}(x - N^{**}) + gb^o,$$

$$z = \frac{l\gamma^o}{n^*}(x - N^{**}) + gc^o;$$

on aura ensuite, par les équations de l'article IV,

$$\xi^* = N^* - \frac{n^o h - g(\xi - N^o)}{n^o l} = N^* - ghn^* - g^2\frac{n^*}{n^o}(N^o - \xi)$$

$$= N^{**} - \frac{n^*}{n^o}g^2(N^o - \xi),$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{l} = g\eta,$$

$$\zeta^* = \frac{\zeta}{l} = g\zeta.$$

Si l'on fait, dans ces formules,

$$\xi = N^o, \quad \eta = o, \quad \zeta = o,$$

on en conclura

$$\xi^* = N^{**}, \quad \eta^* = o, \quad \zeta^* = o;$$

d'où l'on voit que le point N^{**} est alors le foyer conjugué du point N^o, et que le rapport des dimensions d'un objet placé en N^o à celles de son image placée en N^{**}, est celui de 1 à g ou de l à 1.

Article XII. — Le cas de l'article XI est réalisé par une lunette dont les verres sont adaptés pour donner la vision distincte des objets éloignés dans de la lumière émergente parallèle.

Les équations de la route finale montrent que sa direction ne dépend que de la direction de la route initiale; ainsi tout faisceau de rayons parallèles qui se présente à l'entrée de la lunette sort aussi à l'état de faisceau parallèle du côté opposé.

La tangente trigonométrique de l'angle avec l'axe étant représentée

par

$$\frac{1}{n^0}\sqrt{\beta^{0\,2}+\gamma^{0\,2}}$$

pour la route initiale du rayon, celle relative à la route du rayon émergent le sera par

$$\frac{l}{n^0}\sqrt{\beta^{0\,2}+\gamma^{0\,2}}.$$

Ainsi le nombre l, ou $\frac{1}{g}$, représente ce qu'on a nommé *le grossissement* dans les appareils optiques destinés à la vision des objets très-éloignés. Selon que le signe de l est positif ou négatif, l'image sera droite ou renversée.

Si l'on retourne la lunette, en dirigeant l'oculaire vers les objets extérieurs, il est clair que les rapports des tangentes des inclinaisons sur l'axe s'intervertissent, et que les objets paraissent rapetissés dans le même rapport suivant lequel ils étaient primitivement agrandis, ce qui donne, pour la mesure du grossissement, un procédé simple que j'ai exposé dans le second volume des *Nouvelles astronomiques*.

Un autre procédé consiste à déterminer le rapport linéaire d'un objet à son image. Le dynamètre de Ramsden offre une disposition qui permet de mesurer en N** l'image du contour de l'objectif, sous la condition que la marche des rayons périphériques ne soit pas arrêtée par des diaphragmes intérieurs trop étroits. Comme l'image doit être réelle, il faut que N** — N* soit positif, c'est-à-dire que ghn^* soit négatif. Dans la lunette de Galilée, où l'image de l'objectif est virtuelle, on ne pourrait la mesurer qu'au moyen d'un réticule convenablement placé.

Il est clair d'ailleurs que, dans cette détermination, on peut, au lieu de l'objectif, employer un disque éclairé, placé à une distance convenable en avant de la lunette, pourvu toutefois que l'image de ce disque soit réelle, c'est-à-dire qu'elle vienne se former au dehors de l'oculaire de la lunette.

Le point N** est ce qu'on appelle, dans la dioptrique, *le lieu de l'œil* (Ort des Auges) [*].

---

[*] L'anneau oculaire de M. Biot. A. B.

ARTICLE XIII. — Appliquons maintenant les résultats de l'article II à une lentille simple; nommons n l'indice de réfraction du verre; représentons par $(n-1)f$, $-(n-1)f'$ les rayons de courbure de la première et de la seconde surfaces, positifs si l'abscisse du centre de la sphère surpasse celle de son point d'intersection avec l'axe, négatifs dans le cas contraire; enfin, appelons ne l'épaisseur de la lentille : nous aurons

$$\begin{aligned} n^0 &= 1, \\ n' &= n, \\ n'' &= 1, \\ u^0 &= -\frac{1}{f}, \\ t' &= e, \\ u' &= -\frac{1}{f'}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} g &= 1 + u^0 t' = \frac{f-e}{f}, \\ h &= t' = e, \\ k &= u^0 + u' + t' u^0 u' = -\frac{f+f'-e}{ff'}, \\ l &= 1 + u' t' = \frac{f'-e}{f'}; \end{aligned}$$

enfin, pour la distance focale, conformément à la définition donnée dans l'article IX,

$$\varphi = \frac{ff'}{f+f'-e}.$$

On aura ensuite, d'après les formules de l'article VI,

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathrm{N}^0 + \frac{ef}{f+f'-e} = \mathrm{N}^0 + \frac{e\varphi}{f'}, \\ \mathrm{E}' &= \mathrm{N}' - \frac{ef'}{f+f'-e} = \mathrm{N}' - \frac{e\varphi}{f}, \\ \mathrm{F} &= \mathrm{E} - \varphi = \mathrm{N}^0 - \frac{f(f'-e)}{f+f'-e}, \\ \mathrm{F}' &= \mathrm{E}' + \varphi = \mathrm{N}' + \frac{f'(f-e)}{f+f'-e}. \end{aligned}$$

Enfin, pour l'abscisse du point d'intersection de la droite qui traverse la lentille à l'état de rayon central, on trouve facilement [*]

$$x = \mathrm{N}^{o} + \frac{nef}{f+f'} = \mathrm{N}' - \frac{nef}{f+f'}.$$

Ce point est indépendant de la direction de la route initiale, et il est ordinairement désigné sous le nom de *centre optique de la lentille* [**]. Mais il ne mérite réellement ce nom que pour une lentille d'épaisseur infiniment petite, et les énoncés qui se rapportent à ce cas ne peuvent, sans erreur, être étendus au cas des lentilles d'épaisseur finie. Par exemple, la propriété de régler le rapport de l'image à l'objet, si la lentille est d'épaisseur finie, ne s'applique rigoureusement qu'au cas où l'objet est placé en E, et l'image en E*.

Il paraît préférable de donner le nom de *centre optique* au milieu de la droite de jonction des points principaux E, E*, qui est aussi le milieu de la droite de jonction des foyers principaux F, F*. Le centre optique, ainsi défini, ne coïncidera avec l'ancien centre optique que pour une lentille à deux courbures égales.

Le point que nous considérons comme centre optique jouit de cette propriété, que, si l'on retourne la lentille autour de ce point immobile, en renversant son axe bout pour bout, l'image d'un objet fixe continuera à se former dans le même lieu de l'espace.

Remarquons enfin que l'intervalle E' — E a pour valeur

$$ne - \frac{e(f+f')}{f+f'-e} = (n-1)e - \frac{e^2}{f+f'-e}.$$

---

[*] Par exemple, en cherchant, par les méthodes de l'art. 1, le point où le rayon

$$y = \beta(x - \mathrm{E}),$$
$$z = \gamma(x - \mathrm{E}),$$

coupe l'axe, après sa première réfraction. A. B.

[**] Il est ordinairement défini de position par la proportion suivante :

$$x - \mathrm{N}^{o} : \mathrm{N}' - x : \mathrm{N}' - \mathrm{N}^{o} :: f : f' : f + f',$$

d'où l'on déduit les valeurs de x énoncées dans le texte.

On a aussi

$$x - \mathrm{E} : \mathrm{E}' - x :: f : f'.$$ A. B.

et que, dans le cas habituel où e est très-petit par rapport à $f + f'$, cet intervalle diffère très-peu de $(n - 1)e$, c'est-à-dire, très-peu du produit de l'épaisseur de la lentille par le nombre $\frac{n-1}{n}$.

ARTICLE XIV. — Dans le cas d'une série de lentilles disposées sur le même axe, on simplifie les formules générales en substituant aux rayons des surfaces et à leurs distances mutuelles les distances focales de chaque lentille simple, et l'écartement du plan principal de deuxième espèce de chacune d'elles du plan principal de première espèce de la lentille suivante. Les nouvelles formules ainsi obtenues ressemblent à celles de l'article II, mais contiennent un nombre d'éléments moitié moindre.

Désignons par φ^0, φ', φ'',..., les distances focales principales des lentilles qui se suivent sur l'axe, les abscisses des points principaux de première espèce par E^0, E', E'',..., celles des points principaux de deuxième espèce par I^0, I', I'', etc.

Écrivons ensuite

$$-\frac{1}{\varphi^0} = u^0, \quad -\frac{1}{\varphi'} = u', \quad -\frac{1}{\varphi''} = u'', \ldots,$$

et convenons de figurer, au moyen d'un astérisque, les derniers termes de ces séries.

Mettons les équations de la route initiale sous la forme

$$y = \beta^0 (x - E^0) + b^0,$$
$$z = \gamma^0 (x - E^0) + c^0,$$

et celles de la route finale sous la forme suivante :

$$y = \beta^* (x - I^*) + b^*,$$
$$z = \gamma^* (x - I^*) + c^*.$$

La loi de dérivation est donnée [*] par les équations suivantes :

$$b^* = g b^0 + h \beta^0, \qquad c^* = g c^0 + h \gamma^0,$$
$$\beta^* = k b^0 + l \beta^0, \qquad \gamma^* = k c^0 + l \gamma^0,$$

---

[*] Considerons l'équation

$$y = \beta^0 (x - E^0) + b^0;$$

on en déduit, pour le rayon sortant de la lentille (art. VI), à cause de $n^* = 1$, et de

les quantités g, h, k, l se déduisant de u^0, u', u'',..., t', t'',..., de la manière qu'indiquent les équations (5) de l'article II.

Pour trouver les deux points principaux du système de lentilles considéré dans son ensemble, on peut reprendre la méthode de calcul de l'article V, en y remplaçant N°, N* par E°, I*, et y faisant $\vartheta = \frac{1-l}{k}$, $\vartheta^* = \frac{1-g}{k}$: on trouve alors, pour les abscisses de ces deux points principaux,

$$x = \mathrm{E}^0 - \frac{1-l}{k},$$

$$x = \mathrm{I}^* + \frac{1-g}{k}.$$

On trouverait de même, pour les deux foyers principaux du système,

$$x = \mathrm{E}^0 + \frac{l}{k},$$

$$x = \mathrm{I}^* - \frac{g}{k}.$$

La distance focale principale, qui mesure l'écartement d'un plan prin-

---

$k = -\frac{1}{\varphi^0}$,

$$y = \left(\beta^0 - \frac{1}{\varphi^0} b^0\right)(x - \mathrm{I}^0) + b^0 = (\beta^0 + u^0 b^0)(x - \mathrm{I}^0) + b^0,$$

et ensuite

$$y = (\beta^0 + u^0 b^0)(x - \mathrm{E}') + (\beta^0 + u^0 b^0)(\mathrm{E}' - \mathrm{I}^0) + b^0;$$

donc, si

$$y = \beta'(x - \mathrm{E}') + b'$$

est l'équation du rayon qui a traversé la lentille, on aura

$$\beta' = \beta^0 + u^0 b^0,$$
$$b' = t'\beta' + b^0 = t'\beta^0 + (1 + u^0 t')\, b^0,$$

loi de dérivation qui est la même que dans le cas des simples surfaces réfringentes.

A. B.

cipal du plan focal principal de même espèce, sera égale à

$$-\frac{1}{k}.$$

Dans le cas d'un système de deux lentilles, on a

$$g = 1 - \frac{1}{\varphi^0} t',$$
$$h = t',$$
$$k = -\frac{1}{\varphi^0} - \frac{1}{\varphi'} + \frac{t'}{\varphi^0 \varphi'},$$
$$l = 1 - \frac{1}{\varphi'} t'.$$

Les valeurs de x, qui fixent la position des deux plans principaux, seront

$$E^0 + \frac{t' \varphi^0}{\varphi^0 + \varphi' - t'} \quad \text{et} \quad I' = \frac{t' \varphi'}{\varphi^0 + \varphi' - t'};$$

la distance focale sera

$$\frac{\varphi^0 \varphi'}{\varphi^0 + \varphi' - t'}.$$

Ces formules sont pareilles à celles de l'article XIII, qui déterminent le lieu des plans principaux et la distance focale d'une lentille simple; il suffit d'y remplacer f^0, f', e par φ^0, φ', t'.

L'intervalle qui sépare l'un de l'autre les deux plans principaux sera alors égal à

$$I' - E^0 - \frac{t'(\varphi^0 + \varphi')}{\varphi^0 + \varphi' - t'} = I^0 - E^0 + I' - E' + t' - \frac{t'(\varphi^0 + \varphi')}{\varphi^0 + \varphi' - t'},$$

ou

$$(I^0 - E^0) + (I' - E') - \frac{t'^2}{\varphi^0 + \varphi' - t'}.$$

Si l'intervalle t' est très-petit, comme cela a lieu dans les lentilles achromatiques à deux verres contigus, le terme en t'^2 peut se négliger, et l'écartement des deux plans principaux dans la double lentille est

sensiblement égal à la somme de ces deux écartements pour chacune des deux lentilles intégrantes.

Il serait facile d'étendre les formules de cet article au cas où l'on combinerait entre elles, non plus deux ou plusieurs lentilles, mais deux ou plusieurs systèmes de lentilles; chacun de ces systèmes agirait comme ferait une lentille unique ayant les mêmes points principaux et les mêmes foyers principaux.

ARTICLE XV. — Lorsqu'une lentille ou un système de lentilles sont disposés suivant un même axe, les effets optiques qu'ils produisent dépendent des lieux qu'y occupent les deux foyers principaux, et, en outre, de la valeur absolue de la distance focale du système, laquelle, les foyers étant donnés, sert à fixer la position des points principaux.

Soit D un point déterminé pris sur l'axe, et soit aussi D l'abscisse de ce point; écrivons

$$D - F = p, \qquad F' - D = q,$$

et nommons f la distance focale. Soient de plus ξ et ξ' les abscisses d'un point servant d'objet et de son image. En faisant varier la position de l'objet le long de l'axe, celle de l'image variera en même temps, et l'on pourra en déduire les valeurs des trois quantités p, q, f qui se trouveront ainsi déterminées expérimentalement, sans passer par l'intermédiaire des indices de réfraction des courbures des surfaces réfringentes, et des intervalles qui les séparent.

Mesurons donc les deux distances $D - \xi = a$, $\xi' - D = b$; l'équation connue

$$(F - \xi)(\xi' - F') = f^2$$

se changera en

$$(a - p)(b - q) = f^2.$$

Deux autres expériences donneront de même, en nommant a', b', a'', b'' les valeurs simultanées de a et de b,

$$(a' - p)(b' - q) = f^2,$$
$$(a'' - p)(b'' - q) = f^2,$$

d'où l'on déduit, par élimination,

$$a-p=\frac{(a'-a)(a''-a)(b'-b'')}{\mathrm{R}},\quad b-q=\frac{(b-b')(b-b'')(a''-a')}{\mathrm{R}},$$

$$a'-p=\frac{(a'-a)(a''-a')(b-b'')}{\mathrm{R}},\quad b'-q=\frac{(b-b')(b'-b'')(a''-a)}{\mathrm{R}},$$

$$a''-p=\frac{(a''-a)(a''-a')(b-b')}{\mathrm{R}},\quad b''-q=\frac{(b-b'')(b'-b'')(a'-a)}{\mathrm{R}},$$

$$f^2=\frac{(a'-a)(a''-a)(a''-a')(b-b')(b-b'')(b'-b'')}{\mathrm{R}^2},$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}\mathrm{R}&=(a''-a)(b-b')-(a'-a)(b-b'')\\&=(a''-a')(b-b')-(a'-a)(b'-b'')\\&=(a''-a')(b-b'')-(a''-a)(b'-b'').\end{aligned}$$

Article XVI. — Relativement à la solution précédente, on fera les remarques suivantes :

1°. L'objet, dans les trois expériences, reste toujours placé du même côté par rapport à la lentille; si l'on jugeait convenable de le placer du côté opposé, il faudrait considérer l'image comme étant l'objet, et l'objet comme étant l'image, ce qui nous ferait rentrer dans le cas de l'article XV;

2°. La formule qui donne f^2 ne détermine pas son signe; mais on saura toujours si f est positif ou négatif, en regardant si l'image est droite ou renversée : dans le premier cas, $\xi'-\mathrm{F}'$ et f auront des signes contraires; si l'image est renversée, ces quantités auront le même signe;

3°. La méthode ne s'applique avec facilité qu'au cas des images réelles : si l'image était virtuelle, il faudrait recourir à des artifices plus ou moins compliqués pour en déterminer le lieu géométrique;

4°. Enfin, les conditions dans lesquelles sont faites les trois expériences doivent être le plus différentes possible, afin que les résultats obtenus soient exacts : si les circonstances de position étaient trop semblables, la précision des déterminations en souffrirait évidemment.

Article XVII. — Dans le cas d'une lentille simple, ou de deux ou plusieurs lentilles accouplées, comme cela arrive notamment pour les

objectifs achromatiques, la distance des deux points principaux E et E′ est petite, et en la supposant connue et égale à λ, on aura

$$E' - E = \lambda,$$
$$F' - F = p + q = 2f + \lambda.$$

Alors deux observations suffisent, et, si l'on écrit

$$(a - p)(b - q) = f^2,$$
$$(a' - p)(b' - q) = f^2,$$

on aura, après l'élimination de p et de q,

$$\frac{(a' + b' - a - b)^2}{(a' - a)(b - b')} f^2 + 2(a + b + a' + b' - 2\lambda) f - (a + b' - \lambda)(a' + b - \lambda) = 0.$$

Si l'on dispose les expériences de telle sorte que l'on ait

$$a' + b' = a + b = c,$$

la distance de l'image à l'objet sera la même dans les deux observations, quoique la position relative de la lentille ait varié. On trouve alors facilement

$$f = \frac{1}{4}(c - \lambda) - \frac{(b' - b)^2}{4(c - \lambda)}.$$

Pour chaque valeur de c, la distance de l'objet au foyer principal de première espèce, c'est-à-dire $F - \xi$, devra satisfaire à l'équation suivante,

$$F - \xi + \frac{f^2}{F - \xi} = F - \xi + \xi' - F' = c - 2f - \lambda,$$

ce qui donne pour $F - \xi$ les deux valeurs

$$F - \xi = \frac{1}{2}(c - 2f - \lambda) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(c - 4f - \lambda)(c - \lambda)},$$

et, par suite, deux positions de l'objet pour lesquelles l'intervalle c reprend la même valeur. Ces racines ne deviennent égales que dans le cas où $c = 4f + \lambda$.

Le produit des deux racines de $F - \xi$, c'est-à-dire $(a - p)(a' - p)$,

est évidemment égal à f^2, et, comme l'on a pareillement

$$(a-p)(b-q)=f^2,$$
$$(a'-p)(b'-q)=f^2,$$

il en résulte $a'-p=b-q$, $b'-q=a-p$. On a ensuite, pour la position des foyers et des points principaux,

$$\mathrm{F}=\mathrm{D}+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)-\tfrac{1}{2}(2f+\lambda),$$
$$\mathrm{F}'=\mathrm{D}+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)+\tfrac{1}{2}(2f+\lambda),$$
$$\mathrm{E}=\mathrm{D}+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)-\tfrac{1}{2}\lambda,$$
$$\mathrm{E}'=\mathrm{D}+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)+\tfrac{1}{2}\lambda.$$

Article XVIII. — Lorsqu'on a $\mathrm{F}-\xi=f$, on a aussi $\xi'-\xi=4f+\lambda$, et l'écartement entre l'objet et l'image est à son minimum. Dans le voisinage de cette position, un faible déplacement de la lentille fait varier à peine l'écartement, de sorte que b et b' ne pourraient être que mal déterminés par l'expérience dans de telles conditions. Cette circonstance n'influe pas d'ailleurs sur la mesure de f, attendu que l'expression de f contient seulement le carré de la quantité $b-b'$, qui représente le déplacement de la lentille, et il suffit de mesurer ce déplacement pour en déduire $b-b'$.

Article XIX. — Si l'on néglige l'épaisseur λ, l'équation qui donne la valeur de f se change en

$$f=\frac{1}{4}c-\frac{(b'-b)^2}{4c}.$$

Le procédé basé sur l'emploi de cette équation s'accorde avec celui décrit par Bessel dans le XVII^e^ volume des *Nouvelles astronomiques*, et appliqué par ce savant à la mesure de la distance focale de l'héliomètre de Kœnigsberg.

Il est évident que la distance focale, ainsi mesurée, surpasse la véritable de la quantité

$$\frac{1}{4}\lambda+\frac{\lambda(b'-b)^2}{4c(c-\lambda)},$$

expression dont le second terme peut être regardé comme négligeable.

On peut donc se contenter du premier terme. Toutefois il est assez difficile de mesurer exactement la valeur de λ. Pour une lentille simple, on peut se borner à la valeur $(n-1)e$, que nous avons indiquée dans l'article XIII; il suffit de mesurer l'épaisseur de la lentille et l'indice de réfraction du verre employé. Pour une lentille à deux verres, dont on peut obtenir séparément les épaisseurs, on recourra à la règle de l'article XIV.

Je prendrai, comme exemple, un objectif dont la lentille en crown aurait 7 lignes d'épaisseur, et celle de flint 3 lignes; les indices étant pour la première 1,528, et pour la seconde 1,618, la valeur de λ serait,

	lig
Pour le crown.	2,42.
Pour le flint.	1,15.
Et pour la lentille double.	3,57.

La distance focale obtenue, en négligeant λ, serait donc trop forte de $0^{lig},89$. Ainsi, pour une distance focale de 8 pieds, qui est celle de notre objectif, l'erreur se monterait à $\frac{1}{1300}$ de la valeur absolue.

Article XX. — Si l'on jugeait insuffisante cette méthode pour déterminer la valeur de λ, on pourrait recourir au procédé suivant :

Déterminons le lieu de l'image d'un objet très-éloigné par rapport au point fixe D lié à la lentille; la distance de cette image à D sera

$$F' - D = q.$$

En renversant la lentille, et opérant de même, nous aurons pareillement

$$D - F = p.$$

Plaçons ensuite un objet en ξ, du côté de F, et très-près de la lentille; mesurons sa distance à D, et posons

$$D - \xi = a''.$$

Mesurons la distance de son image ξ' à D, et posons

$$\xi' - D = b'' :$$

nous aurons

$$p - a'' = \xi - \mathrm{F}, \quad q - b'' = \mathrm{F}' - \xi',$$
$$(p - a'')(q - b'') = f^2,$$
$$\lambda = \mathrm{F}' - \mathrm{F} - 2f = p + q - 2\sqrt{(p - a'')(q - b'')}.$$

On peut mettre cette expression sous la forme

$$\lambda = a'' + b'' + \frac{\left[p - a'' - \sqrt{(p - a'')(q - b'')}\right]^2}{p - a''}.$$

Or $p - a''$ est la distance de l'objet au foyer principal F : $p - a'' - \sqrt{(p - a'')(q - b'')}$ est sa distance, généralement très-petite, au point principal E ; le carré de cette dernière quantité sera très-petit par rapport à $p - a''$: ainsi l'exactitude de la détermination de λ reposera surtout sur l'exactitude de la mesure de $a'' + b''$, c'est-à-dire de $\xi' - \xi$.

Article XXI. — Nous ferons encore à ce sujet les remarques suivantes :

1°. Comme, dans la troisième expérience, l'image devient virtuelle, il conviendra, pour mesurer $\xi' - \xi$, d'employer le procédé suivant : sur le porte-objet d'un microscope on placera un disque portant deux traits noirs croisés rectangulairement, et, par-dessus ce disque, la lentille dont l'axe doit correspondre à la croisée des traits. En levant ou abaissant le microscope, on l'ajustera à la vision distincte de cette croix ; puis, enlevant la lentille, on ajustera de nouveau le microscope sur la croix, et le déplacement qu'il aura subi parallèlement à son axe représentera la quantité $\xi' - \xi$.

2°. Lorsque, dans la détermination des foyers principaux, la distance de l'objet n'est pas jugée assez grande pour pouvoir être considérée comme infinie, il est clair qu'il faut retrancher de la valeur obtenue pour $\mathrm{F}' - \mathrm{D}$ une correction égale au carré de la distance focale divisée par la distance de l'objet ; on a alors l'exacte valeur de q : la même correction doit être appliquée à la quantité p.

Soient, dans la première expérience, $\mathrm{D} - \xi = a$, a étant une longueur très-considérable par rapport à la distance focale de la lentille, et $\xi' - \mathrm{D} = b$, b différant très-peu de $\mathrm{F}' - \mathrm{D}$;

Soient, dans la seconde expérience, $\mathrm{D} - \xi = b'$, b' étant aussi une

très-grande longueur sensiblement égale à a, et $\xi' - D = a'$; nous retombons sur les trois équations

$$(a - p)(b - q) = f^2,$$
$$(b' - q)(a' - p) = f^2,$$
$$(a'' - p)(b'' - q) = f^2.$$

Or, comme dans la deuxième expérience, il est toujours permis de supposer que le lieu de l'image est le même que dans la première (car un petit déplacement de la lentille parallèlement à elle-même entraîne l'image d'un objet très-éloigné avec un mouvement qui est sensiblement le même que celui de la lentille), il est permis d'écrire

$$a + b = a' + b' = c.$$

Remplaçant, dans les équations de l'article XV, a et b' par leurs valeurs tirées de ces deux dernières équations, on aura

$$p = a' - \frac{(a' - a'')(b - b'')}{c - a'' - b''},$$

$$q = b - \frac{(a' - a'')(b - b'')}{c - a'' - b''},$$

formules qui donnent la valeur *exacte* de la correction commune à appliquer aux quantités a' et b pour en déduire p et q.

Lorsqu'on applique la méthode indiquée dans l'article XVII de la manière qui vient d'être exposée dans les alinéa précédents, les valeurs de E, E′ se changent en

$$E = D + \tfrac{1}{2}(q - p) - \tfrac{1}{2}\lambda = D + \tfrac{1}{2}(b - a') - \tfrac{1}{2}\lambda,$$
$$E' = D + \tfrac{1}{2}(q - p) + \tfrac{1}{2}\lambda = D + \tfrac{1}{2}(b - a') + \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Article XXII. — La valeur obtenue pour la distance focale, et les positions de nos quatre plans principaux, ne conviennent rigoureusement qu'à une lumière de réfrangibilité déterminée. Pour des rayons d'une autre espèce, ces plans se déplacent, et la lumière qui a traversé le système éprouve une dispersion à la sortie. On peut la faire disparaître par une combinaison convenable de lentilles. Pour qu'un ob-

jectif soit parfaitement achromatique, il est nécessaire que des rayons arrivant parallèles sur l'objectif convergent rigoureusement en un point unique à leur sortie ; mais il ne suffit pas que les choses se passent de la sorte pour un système de rayons parallèles à l'axe, il faut encore qu'il en soit de même pour tout faisceau oblique à l'axe. En d'autres termes, les images colorées d'un objet fini, éclairé par de la lumière blanche, doivent non-seulement se former dans un même plan focal, mais, de plus, elles doivent avoir la même grandeur. La première de ces deux conditions exige l'identité du point focal de deuxième espèce pour les diverses couleurs, la seconde exige l'identité des distances focales, et, par suite, la condition précédente étant supposée remplie, la coïncidence du plan principal de deuxième espèce pour les diverses couleurs. Si la première de ces deux conditions était seule satisfaite, les rayons obliques à l'axe ne pourraient donner une image nette ; mais si les distances focales sont très-peu inégales, le défaut de netteté qui en résulte est toujours presque insensible.

Dans la construction actuelle des objectifs achromatiques, on ne s'attache guère qu'à satisfaire à la première des deux conditions que nous venons d'indiquer. Lorsque les lentilles destinées à se compenser sont au contact ou dans un état qui en est très-voisin, le lieu des deux plans principaux de l'objectif est à peine modifié par les différences de réfrangibilité des divers rayons ; car la seconde condition se trouve toujours à peu près satisfaite. On pourrait d'ailleurs, si cela en valait la peine, calculer les épaisseurs des lentilles, de manière à produire la coïncidence rigoureuse du deuxième plan principal qui se rapporte aux rayons rouges avec celui qui se rapporte aux rayons violets.

Il n'en est plus de même si l'on écarte la lentille convexe en crown de la lentille de flint, en transportant l'une d'elles dans l'intérieur de la lunette. On peut, en effet, déterminer leur écartement et les distances focales de ces deux lentilles, de manière à faire coïncider les foyers principaux de deuxième espèce propres aux différentes couleurs ; mais alors la distance focale du système des deux lentilles pour les rayons violets sera nécessairement plus grande que celle relative aux rayons rouges, et l'aberration ainsi produite sera de même ordre que celle qui a lieu (dans un autre sens) dans les lentilles simples non achromatiques. Le même effet se produit aussi dans les lunettes dites

dialytiques, où la seconde lentille est une combinaison d'une lentille de flint et d'une autre de crown juxtaposées. Il n'est pas possible d'obtenir ainsi une image parfaitement achromatique d'un objet; car, si l'image violette est amenée à coïncider avec l'image rouge dans un même plan focal, elle sera nécessairement plus étendue que l'image rouge, et devra, par conséquent, la déborder.

Il ne faut pas cependant se hâter de conclure qu'une telle lunette sera nécessairement d'un achromatisme moins parfait que les lunettes construites d'après les principes ordinaires, et munies d'objectifs donnant des images parfaitement nettes.

L'image réelle ou virtuelle d'un objectif peut, quoique parfaitement achromatique, arriver colorée dans l'œil, à cause de la dispersion que produit le passage de la lumière à travers les verres oculaires. A la vérité, on peut disposer ceux-ci de manière à détruire l'irisation du bord des images; mais alors l'aberration longitudinale de réfrangibilité subsiste, et celle qui est propre à notre œil vient encore s'y ajouter. Tout ce que l'on peut faire, c'est de donner aux deux images virtuelles, rouge et violette, fournies par le système oculaire, la même grandeur apparente; mais on ne peut obtenir qu'elles se forment à la même distance de l'œil, ni, par conséquent, qu'elles soient également visibles.

L'inégalité de grandeur des images rouge et violette, inévitable dans les lunettes dialytiques, peut y être compensée par une disposition convenable des verres oculaires, et s'annuler tout aussi bien que dans les lunettes achromatiques ordinaires; mais l'aberration longitudinale de sphéricité y subsistera, tant que les images rouge et violette de l'objectif viendront se former dans le même plan focal.

Il résulte de ces considérations que, pour que l'image formée sur la rétine soit parfaitement achromatique, l'image due à l'objectif doit avoir déjà un certain degré d'aberration longitudinale de réfrangibilité, qui devra être calculée d'avance d'après l'aberration de l'oculaire et celle de l'œil lui-même.

Théoriquement, on peut calculer les courbures d'un objectif à deux verres, de manière à donner à ses images une aberration longitudinale de réfrangibilité assignée à priori: mais, indépendamment de la difficulté qu'il y aurait à introduire dans les procédés pratiques une pré-

cision suffisante pour obtenir une aberration ainsi déterminée d'avance, celle-ci ne pourrait convenir qu'à un oculaire fait exprès pour la compenser.

Le mode de construction des lunettes dialytiques, et la mobilité dont jouit la lentille intérieure par rapport à la lentille extérieure, peuvent fournir le moyen de faire varier l'aberration longitudinale à la volonté de l'opérateur, et de lui donner la valeur qui convient à un oculaire quelconque, tandis que la disposition de l'oculaire lui-même peut servir à faire disparaître la coloration des bords de l'image. C'est là un sujet de recherches intéressantes, et sur lequel j'espère, en une autre occasion, pouvoir donner des développements plus étendus.

NOTE DE DIOPTRIQUE,

PAR M. A. BRAVAIS.

En traduisant le beau Mémoire de M. Gauss, intitulé : *Recherches dioptriques*, qui remplit les pages précédentes, j'ai été curieux d'étudier, d'une manière encore plus étendue, s'il était possible, le cas des lunettes, soit astronomiques, soit terrestres, soit construites d'après les principes de Galilée. En général, ces instruments sont considérés comme ayant le tirage de leurs tubes préparé pour un œil qui ne verrait nettement que les objets placés à l'infini, et les calculs qui les concernent se trouvent singulièrement simplifiés par cette hypothèse.

Un tel système optique, formé par une série de lentilles disposées suivant un même axe, est défini par cette propriété, que tout faisceau de rayons parallèles qui le pénètre, sans s'écarter beaucoup de la direction de l'axe, sort aussi à l'état de faisceau parallèle au delà de sa dernière surface réfringente. Il est remarquable que ces systèmes, dont l'importance pratique est si grande, échappent précisément aux lois générales développées par M. Gauss, et ne possèdent pas les quatre points *caractéristiques* signalés par l'illustre auteur, comme il le remarque lui-même [*].

Je supposerai que l'on ait son Mémoire sous les yeux, et j'en conserverai les notations. Je rappellerai que l'axe commun des surfaces réfringentes est pris pour axe des x; que N^o, N^* représentent les abscisses des points où la première et la dernière surface coupent cet axe, et que n^o, n^* sont les indices de réfraction des milieux initial et final.

Ceci posé,

$$y = \frac{\beta^o}{n^o}(x - N^o) + b^o,$$

$$z = \frac{\gamma^o}{n^o}(x - N^o) + c^o,$$

[*] Page 26 de ce volume.

étant les équations de la route initiale du rayon lumineux,

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + b^*,$$
$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + c^*,$$

étant les équations de la route finale du même rayon, après sa sortie du système, M. Gauss démontre que l'on a

$$b^* = gb^\circ + h\beta^\circ, \qquad c^* = gc^\circ + h\gamma^\circ,$$
$$\beta^* = kb^\circ + l\beta^\circ, \qquad \gamma^* = kc^\circ + l\gamma^\circ,$$

$\frac{g}{h}$ étant l'avant-dernière, et $\frac{k}{l}$ la dernière réduite d'une certaine fraction continue de la forme

$$u^\circ + \cfrac{1}{t' + \cfrac{1}{u' \ldots + \cfrac{1}{t' + \frac{1}{u^*}}}};$$

les quotients incomplets de cette fraction dépendent des indices des milieux successifs, des rayons des sphères et des intervalles qui séparent leurs centres, de la manière qui a été indiquée par M. Gauss [*].

Le cas remarquable des systèmes dioptriques qui laissent aux rayons lumineux leur parallélisme primitif, se présente lorsque la fraction continue dont nous venons de parler devient nulle, c'est-à-dire lorsque l'on a $k = 0$, et l'illustre géomètre en examine les conséquences, dans les articles XI et XII de son Mémoire.

Les deux *points principaux* nommés E, E* par M. Gauss, ainsi que les deux *foyers principaux* F, F*, s'éloignent alors simultanément pour se porter à l'infini, et l'on ne peut plus se servir de la considération de ces points pour déduire la route finale de la route initiale, ou pour déterminer le lieu de l'image d'après celui de l'objet. Toutefois il existe alors encore un point remarquable situé sur l'axe, dont la connaissance

[*] Page 16 de ce volume.

permet de résoudre facilement le problème précédent, et dont le rôle est analogue à celui des quatre points mentionnés par M. Gauss.

Pour le faire voir, je reprends les formules données dans l'article XI, savoir :

$$\xi^* = N^* - \frac{n^o h - g(\xi - N^o)}{n^o l} n^*,$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{l} = g\eta, \qquad \zeta^* = \frac{\zeta}{l} = g\eta;$$

dans ces formules, ξ, η, ζ sont les coordonnées du point lumineux arbitrairement choisi, mais à petite distance de l'axe; ξ^*, η^*, ζ^* sont les coordonnées du point où se forme le foyer réel ou virtuel des rayons qui ont complétement traversé le système des surfaces réfringentes successives.

De la première de ces trois équations on tire facilement

$$\xi^* n^o l - \xi n^* g = N^* n^o l - N^o n^* g - n^o n^* h,$$

et, si l'on pose

$$\frac{N^* n^o l - N^o n^* g - n^o n^* h}{n^o l - n^* g} = D,$$

celle-ci pourra être mise sous la forme

$$(\xi^* - D) n^o l - (\xi - D) n^* g = 0.$$

Ainsi le point de l'axe ayant D pour abscisse, jouira de cette propriété, 1° que tout objet situé dans un plan normal à l'axe donnera son image sur un deuxième plan pareillement normal à l'axe, et situé du même côté que lui par rapport au point D, et 2° que les distances du plan de l'objet et du plan de l'image à ce point D seront entre elles dans le rapport constant $n^o l : n^* g$.

En outre, on peut aussi déterminer sur l'axe un certain point C, dont l'abscisse sera donnée par l'équation

$$C = \frac{l\xi^* - \xi}{l - 1} = D + \frac{l(\xi^* - D) - (\xi - D)}{l - 1} = D + \frac{n^o l^{\frac{1}{2}} - n^* g^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}}} \frac{D - \xi}{n^o l},$$

et l'on aura alors

$$\xi^* - C = \frac{\xi - C}{l};$$

cette équation, étant rapprochée de

$$\eta^* = \frac{\eta}{l}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{l},$$

montre que le point C, ainsi déterminé, est un centre de similitude entre l'image et l'objet. La similitude est directe, si l est positif; elle est inverse dans le cas contraire.

Dans le cas le plus ordinaire, le milieu initial et le milieu final parcourus par les rayons lumineux sont de même nature; c'est ce qui arrive entre autres dans les lunettes. Alors on écrira

$$n^* = n^\circ = 1,$$

et, remarquant que l'on a $g = \frac{1}{l}$, on trouvera

$$D = \frac{N^* l^2 - N^\circ - hl}{l^2 - 1},$$

$$\xi^* - D = \frac{\xi - D}{l^2},$$

$$C = D - \frac{\xi - D}{l}.$$

Le nombre l représente ce que l'on nomme, en dioptrique, *le grossissement de l'appareil;* cette quantité est négative dans les lunettes qui renversent, comme la lunette astronomique; elle est positive dans celles qui donnent des images droites. Dans le premier cas, le point C est situé entre les deux plans focaux conjugués à abscisses ξ, ξ^*; dans le second cas, il est situé au delà de la ligne de jonction de ces points et de l'autre côté du point D. De là résulte, pour trouver le foyer conjugué d'un point lumineux, tel que P, la construction suivante : « De P, abaissez sur l'axe la perpendiculaire Pp, et comptez, à partir » du point D vers p, une longueur Dp^* égale au quotient de Dp par » le carré du grossissement. Comptez aussi, à partir de D vers p, si la » lunette renverse, et en sens inverse dans le cas contraire, une lon-

» gueur DC égale à la longueur Dp divisée par le grossissement. » Joignez PC et prolongez, s'il le faut, cette ligne jusqu'à sa rencontre » en P* avec le plan p^*P* mené par p^* normalement à l'axe; P* sera » le point cherché. »

Le plan passant par D jouit de cette propriété importante, que tous les points qui y sont contenus ont leurs foyers conjugués en d'autres points du même plan; et quant au point D, considéré comme point lumineux, il coïncide avec le foyer de ses propres rayons. On pourrait même se servir de cette propriété pour trouver sa position; il suffirait, en effet, de faire $\xi = \xi^* = \mathrm{D}$ dans l'équation

$$\xi^* = \mathrm{N}^* - \frac{n^o h - g(\xi - \mathrm{N}^o)}{n^o l} n^*.$$

On pourrait ainsi appeler le point D le point *confocal* du système.

Dans le cas des lunettes, on sait que l'image de la surface antérieure de l'objectif se forme un peu au delà de l'oculaire, et y détermine un petit disque lumineux connu sous le nom d'*anneau oculaire* (*Ort des Auges* en allemand). Ces deux plans sont l'image l'un de l'autre, et en écrivant, avec M. Gauss, que l'abscisse du plan de l'anneau oculaire est égale à N**, on trouvera facilement

$$\mathrm{D} - \mathrm{N}^{**} = (\mathrm{N}^{**} - \mathrm{N}^o) \frac{n^* g}{n^o l - n^* g},$$
$$\mathrm{D} - \mathrm{N}^{**} : \mathrm{D} - \mathrm{N}^o :: n^* g : n^o l,$$

et si l'on pose $n^* = n^o = 1$, $g = \frac{1}{l}$,

$$\mathrm{D} - \mathrm{N}^{**} = \frac{\mathrm{D} - \mathrm{N}^o}{l^2} = \frac{\mathrm{N}^{**} - \mathrm{N}^o}{l^2 - 1}.$$

D'où l'on voit que, dans les lunettes à fort grossissement, le point D sera toujours très-voisin de l'anneau oculaire, et situé un peu au delà dans les lunettes à anneau oculaire extérieur. Mais, dans les lunettes de Galilée, où l'anneau oculaire est intérieur, le point D est situé entre l'anneau oculaire et l'oculaire, et généralement plus rapproché du premier.

Il résulte de ce qui précède que, dans le cas des grossissements très-

forts appliqués aux objets très-éloignés, l'image se forme à une distance infiniment moindre que l'objet. Par exemple, si, avec une lunette astronomique grossissant mille fois, on regarde le globe lunaire, son image se formera à une distance de la lunette un million de fois moindre que la distance réelle, soit à environ 380 mètres, et l'image virtuelle formée en ce lieu aura des dimensions mille fois moindres que celles de l'objet.

Le point D jouit encore de la propriété remarquable que, si l'on y place un point lumineux, ou un foyer réel ou virtuel, tout le système optique agira sur les rayons pour augmenter ou diminuer leur divergence naturelle, sans déranger leur point de concours; de sorte qu'un tel appareil modifiera un cône donné de rayons, de manière à le rétrécir ou à l'élargir, mais sans déplacer en aucune façon le lieu de son sommet.

Lorsque la lunette se décompose en un système objectif et en un système oculaire indépendant du précédent, et pouvant glisser tout d'une pièce par rapport au système objectif immobile, nommons F, F′ les foyers principaux de première et de deuxième espèce du système objectif; F*, F′* ceux du système oculaire; φ^0 la distance focale principale du système objectif; φ' celle du système oculaire; ξ l'abscisse du lieu de l'objet sur l'axe; ξ^* celle de son image; et ξ' celle du point de l'axe qui sert de foyer conjugué à ξ, par rapport au système objectif, et à ξ^* par rapport au système oculaire. Soient enfin η, ζ, η^*, ζ^*, η', ζ' les autres coordonnées de ces trois points.

On aura, par le passage à travers le système objectif,

$$F^* - \xi' = \frac{(\varphi^0)^2}{\xi - F},$$

et, par le passage à travers le système oculaire,

$$F'^* - \xi^* = \frac{\varphi'^2}{\xi' - F'};$$

d'où l'on tire

$$\frac{(\varphi^0)^2}{\xi - F} + \frac{\varphi'^2}{F'^* - \xi^*} = F^* - F'.$$

Lorsque l'on a profité du tirage de la lunette pour faire coïncider

les points F′, F*, il est clair qu'elle est dans les conditions des systèmes à distance focale infinie, et l'on a alors

$$F - \xi : F'^* - \xi^* :: (\varphi^o)^2 : \varphi'^2.$$

Mais on peut appliquer au cas actuel les formules de M. Gauss [*], qui donnent les valeurs de g, h, k, l, dans le cas de deux lentilles, puisque chacun des deux systèmes oculaire et objectif agit comme une lentille simple ; on fera donc, dans ces formules,

$$t' = \varphi^o + \varphi',$$

d'où

$$g = -\frac{\varphi'}{\varphi^o}, \quad h = \varphi^o + \varphi', \quad k = 0, \quad l = -\frac{\varphi^o}{\varphi'};$$

donc on aura

$$F - \xi : F'^* - \xi^* :: l^2 : 1,$$

proportion dans laquelle l continue à représenter le grossissement de la lunette. Les points F, F′* sont alors deux foyers conjugués. Cette relation nous fournit un nouveau procédé pour obtenir la position du point D, en y faisant

$$\xi = \xi^* = D.$$

Mais lorsque, par l'effet de la variation du tirage de la lunette, F′, F* ont cessé de coïncider, la proportion précédente n'a plus lieu, et l'on a alors

$$\frac{1}{F'^* - \xi^*} = \frac{l^2}{F - \xi} + \frac{F^* - F'}{\varphi'^2},$$

$$F^* - \xi^* = \frac{F - \xi}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{(F - \xi)(F^* - F')}{(\varphi^o)^2}}.$$

Quant au rapport de l'image à l'objet, on l'obtiendra en écrivant :

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{\varphi^o}{\xi - F},$$

$$\frac{\eta^*}{\eta'} = \frac{\zeta^*}{\zeta'} = \frac{F'^* - \xi^*}{\varphi'},$$

$$\frac{\eta^*}{\eta} = \frac{\zeta^*}{\zeta} = \frac{\varphi^o}{\varphi'} \frac{F'^* - \xi^*}{\xi - F} = -\frac{1}{l} \frac{F^* - \xi'}{F' - \xi'}.$$

---

[*] Page 33 de ce volume.

RÉSUMÉ SUCCINCT

DES

FORMULES DE GAUSS SUR LA THÉORIE DES LUNETTES,

ET LEUR APPLICATION

A LA DÉMONSTRATION DES PROPRIÉTÉS DE L'ANNEAU OCULAIRE;

PAR M. A. BRAVAIS [*].

Anneau oculaire. — La considération de l'anneau oculaire est l'une des plus importantes de la théorie des lunettes.

On peut considérer tous les rayons entrant dans l'objectif indépendamment de la route qui les y amène, et se représenter l'objectif comme un espace plan lumineux, dont chaque point est le sommet d'un certain cône de rayons arrivant à l'oculaire, s'y réfractant, et allant former leur foyer au dehors de la lunette, un peu au delà de la distance focale de l'oculaire.

Il suffit d'éloigner son œil à une distance égale à Δ pour apercevoir cette image de l'objectif; celui-ci agit comme le ferait un objet lumineux placé sur sa surface extérieure. L'on peut aussi recevoir l'image sur un petit papier blanc placé à une distance convenable de l'oculaire.

C'est cette image qui a reçu le nom d'*anneau oculaire;* elle est semblable à l'objectif, et par conséquent circulaire, et l'oculaire étant à peu près achromatique, elle l'est toujours sensiblement. Elle est d'ailleurs renversée, et l'on peut le reconnaître facilement en masquant, par exemple, le demi-cercle supérieur de l'objectif; le demi-cercle inférieur de l'anneau oculaire est aussitôt assombri.

Dans une lunette à deux verres, le lieu de l'anneau oculaire est facile à déterminer. Soient $-F$, $-F'$ les distances focales négatives de

[*] Note tirée des Leçons de M. Bravais à l'École Polytechnique.

l'objectif et de l'oculaire, on a

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{F'} = \frac{1}{F+F'} - \frac{1}{F'} = \frac{-F}{F'}\,\frac{1}{F+F'},$$

d'où

$$p' = -(F+F')\,\frac{F'}{F}.$$

C'est la distance de l'anneau oculaire. Soit maintenant R_o le rayon du cercle de l'objectif, R_a celui de l'anneau oculaire; on aura évidemment

$$R_a = R_o\,\frac{-p'}{F+F'} = R_o\,\frac{F'}{F}.$$

Donc $\frac{R_o}{R_a}$ est égal à $\frac{F}{F'}$, c'est-à-dire au grossissement de la lunette.

On peut démontrer que cette propriété est générale, quel que soit le nombre des lentilles.

Soit un système quelconque de $n+1$ lentilles disposées suivant un même axe; et soient φ_0, φ_2, φ_4,..., φ_{2n-2}, φ_{2n} les inverses de leurs distances focales, quantités négatives si les lentilles sont convergentes, et positives si elles sont divergentes; soient p_0, p'_0 les distances du point lumineux O et de sa première image à la lentille dont le numéro est 0; p_2, p'_2 celles de la première et de la deuxième image à la lentille numéro 2; enfin p_{2n} et p'_{2n} celles de la $(n-1)^{ième}$ image et de la $n^{ième}$ image à la dernière lentille.

Dans la figure, les p sont tous positifs, et les p' négatifs.

Soit O une dimension de l'objet, I, la dimension correspondante de l'image formée par les rayons qui traversent l'espace D_1; I_3,..., I_{2n-1}, les dimensions homologues dans les images formées par les rayons qui traversent les espaces D_3,..., D_{2n-1}, enfin I_{2n+1} celle de la dernière image en I.

On a les deux formules générales

$$p_{2m} = D_{2m-1} + p'_{2m-2},$$
$$\frac{1}{p'_{2m}} = \varphi_{2m} + \frac{1}{p_{2m}},$$

et la dernière peut se mettre sous la forme

$$p'_{2m} = \frac{1}{\varphi_{2m} + \frac{1}{p_{2m}}}, \qquad \frac{p'_{2m}}{p_{2m}} = \frac{1}{1 + \varphi_{2m} p_{2m}}.$$

En faisant varier m de $m = n$ à $m = 0$, on trouve la fraction continue

$$p'_{2n} = \cfrac{1}{\varphi_{2n} + \cfrac{1}{D_{2n-1} + \cfrac{1}{\varphi_{2n-2} + \cdots + \cfrac{1}{D_1 + \cfrac{1}{\varphi_0 + \frac{1}{p_0}}}}}}.$$

Alors, si l'on forme les trois dernières des $2n - 1$ réduites de cette fraction continue, on aura des expressions de la forme

$$\frac{h}{l}, \quad \frac{g}{k}, \quad \frac{h + gp_0}{l + kp_0},$$

et, par une propriété connue des fractions continues,

$$(1) \qquad gl - hk = 1.$$

On a donc

$$(2) \qquad p'_{2n} = \frac{h + gp_0}{l + kp_0},$$

h, g, l, k étant quatre constantes propres au système de lentilles sur lequel on opère, et qui varient d'un système à un autre.

La quantité $\frac{I_{2n+1}}{O}$ a reçu le nom de *grossissement linéaire de l'appareil;* nous la représenterons par G; il est clair que l'on a

$$\frac{1}{G} = \frac{O}{I_{2n+1}} = \frac{O}{I_1}\frac{I_1}{I}\cdots\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{p_0}{p'_0}\frac{p_2}{p'_2}\cdots\frac{p_{2n}}{p'_{2n}}.$$

Or on a

$$\frac{p_{2m}}{p'_{2m}} = 1 + \varphi_{2m} p_{2m}.$$

Donc on peut écrire

$$\frac{1}{G} = (1 + \varphi_0 p_0)(1 + \varphi_2 p_2)\dots(1 + \varphi_{2n} p_{2n}).$$

Le rapport $\frac{I_{2n+1}}{p'_{2n}} : \frac{O}{p_0}$ a reçu le nom de *grossissement angulaire de l'appareil*.

C'est le rapport de l'angle sous-tendu par l'image vue du centre optique de l'oculaire (lentille φ_{2n}) à l'angle sous-tendu par l'objet vu du centre optique de l'objectif (lentille φ_0). Nous le désignerons par γ; c'est cet élément qui constitue *la force optique* de la lunette.

On a évidemment

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{G}\frac{p'_{2n}}{p_0} = \frac{1}{G}\frac{h + gp_0}{p_0(l + kp_0)}.$$

On peut démontrer que l'on a toujours

$$\frac{1}{G} = l + kp_0. \tag{3}$$

Pour le faire voir, on prouve d'abord que cette proposition est vraie pour une seule lentille. En effet, on a alors

$$p'_0 = \frac{1}{\varphi_0 + \frac{1}{p_0}},$$

et les réduites sont

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{\varphi_0}, \quad \frac{p_0}{1 + \varphi_0 p_0};$$

il en résulte

$$l + kp_0 = 1 + \varphi_0 p_0.$$

Or on sait d'ailleurs que, dans ce cas,

$$\frac{1}{G} = 1 + \varphi_0 p_0.$$

Donc le théorème est alors exact. Je dis maintenant que, si la propo-

sition est vraie pour les lentilles d'indices 2_n, 2_{n-2},..., 4, 2, elle le sera pour les lentilles 2_n, 2_{n-2}, ..., 4, 2, 0.

L'équation en p'_{2n} devient

$$p'_{2n} = \frac{1}{\varphi_{2n} + \frac{1}{D_{2n-1}} + \ldots + \frac{1}{\varphi_2 + \frac{1}{p_2}}},$$

et ses trois dernières réduites sont

$$\frac{h'}{l'}, \quad \frac{g'}{k'}, \quad \frac{h' + g' p_2}{l' + k' p_2}.$$

Ainsi l'on aura

$$\frac{I_1}{I_{2n+1}} = l' + k' p_2.$$

Donc

$$\frac{O}{I_{2n+1}} = (l' + k' p_2)\frac{O}{I_1} = (l' + k' p_2)(1 + \varphi_0 p_0).$$

Si maintenant on remplace p_2 par

$$D_1 + \frac{1}{\varphi_0 + \frac{1}{p_0}} = D_1 + \frac{p_0}{1 + \varphi_0 p_0},$$

on aura la série des réduites suivantes :

$$\frac{h'}{l'}, \quad \frac{g'}{k'}, \quad \frac{(h' + g' D_1) = h}{(l' + k' D_1) = l}, \quad \frac{[g' + (h' + g' D_1)\varphi_0] = g}{[k' + (l' + k' D_1)\varphi_0] = k}, \quad \frac{h + g p_0}{l + k p_0}.$$

Donc

$$l + k p_0 = (l' + k' D_1)(1 + \varphi_0 p_0) + k' p_0$$

$$= \left[l' + k' D_1 + \frac{k p_0}{1 + \varphi_0 p_0} \right](1 + \varphi_0 p_0) = (l' + k' p_2)(1 + \varphi_0 p_0)$$

$$= \frac{O}{I_{2n+1}} = \frac{1}{G},$$

ce qu'il fallait démontrer. Donc si la proposition est vraie pour n lentilles, elle l'est aussi pour $n + 1$; donc elle est démontrée généralement.

De $l + k p_0 = \frac{1}{G}$ et de la seconde formule de la page 54, on déduit

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{h + g p_0}{p_0}. \tag{4}$$

Les équations (1), (2), (3), (4) résument toute la théorie des lunettes.

Par exemple, si l'on veut obtenir, normalement à l'axe, la lar-

geur variable d'un faisceau lumineux dont le sommet est à une distance p_0 de l'objectif, et dont la largeur sur l'objectif est λ_0, en appelant $\lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ les largeurs au travers des autres lentilles, on trouve

$$\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_0} = \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{2n-2}}, \ldots, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{p_{2n}}{p_{2n-2}}, \ldots, \quad \frac{p_2}{p'_0} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{l + kp_0}.$$

Ainsi le faisceau qui entre parallèle dans l'objectif avec la largeur $2R_0$, sortira parallèle par l'oculaire avec la largeur

$$2\frac{R_0}{\gamma} = 2R_a.$$

Ainsi l'anneau oculaire donne précisément la section du cylindre émergent formé par les rayons venus d'un point de l'objet.

Cas des rayons venant de l'infini. — Faites $p_0 = \infty$; vous aurez

$$p'_{2n} = \frac{g}{k},$$

et si vous voulez que la lunette soit disposée pour un œil presbyte, il faudra écrire $k = 0$.

Cette équation donne donc la condition pour que des rayons parallèles avant l'entrée, se retrouvent parallèles après la sortie, et que l'appareil soit ainsi adapté à la vue presbyte.

On a alors

$$\frac{1}{G} = l, \quad \frac{1}{\gamma} = g,$$

et comme

$$gl = 1 + hk = 1,$$
$$G = g, \quad \gamma = l.$$

Ainsi G est alors le grossissement linéaire et l le grossissement angulaire inverses l'un de l'autre.

Grossissement angulaire donné par l'anneau oculaire. — L'anneau oculaire s'obtient en faisant $p_0 = 0$ dans

$$p'_{2n} = \frac{h + gp_0}{l + kp_0};$$

il vient alors

$$p_{2n} = \frac{h}{l} = \frac{h}{\gamma},$$

et quant aux dimensions de l'anneau lui-même, on a

$$\frac{R_a}{R_o} = \frac{I_{2n+1}}{O} = G = \frac{1}{\gamma},$$

d'où

$$\gamma = \frac{R_o}{R_a}.$$

Donc le grossissement γ est *toujours* égal au rayon de la section de l'objectif par le plan normal à l'axe, divisé par le rayon de l'anneau oculaire; ainsi cette propriété déjà démontrée pour le cas de deux lentilles est tout à fait générale.

Pour les lunettes astronomiques, où l'on a à la fois $p_0 = \infty$, $p'_{2n} = \infty$, lorsque l'on regarde à très-grande distance, on trouve

$$kp'_{2n}p_0 + lp'_{2n} = h + gp_0,$$
$$k + \frac{l}{p_0} = \frac{h}{p} = \frac{h}{p_0 p'_2} + \frac{g}{p'_{2n}},$$

et, par conséquent,

$$k = 0.$$

Cette équation s'applique à toutes les lunettes où les rayons entrant parallèlement sortent aussi parallèlement.

Les formules (1), (2), (3) et (4) deviennent alors

$$gl = 1, \quad p'_{2n} = \frac{h}{l}, \quad \frac{1}{G} = l, \quad \frac{1}{\gamma} = g = \frac{1}{l} = G.$$

Dans le cas d'une distance finie p_0 d'un objet sur lequel la lunette astronomique serait dirigée, elles prendraient les formes suivantes :

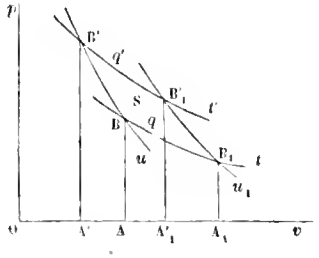
$$gl = 1, \quad p'_{2n} = \frac{h + gp_0}{l}, \quad \frac{1}{G} = l, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{h + gp_0}{p_0} = l\frac{p'_{2n}}{p_0}.$$

RÉCAPITULATION TRÈS-SUCCINCTE

DES

RECHERCHES ALGÉBRIQUES FAITES SUR LA THÉORIE DES EFFETS MÉCANIQUES DE LA CHALEUR PAR DIFFÉRENTS AUTEURS;

PAR **M. F. REECH.**



L'aire quadrilatérale ci-jointe $BB'B'_1B_1$ fait partie de la *fig.* 1 de mon Mémoire intitulé : « Théorie générale des effets dynamiques de la chaleur » (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVIII, 1853).

Cette aire me servait à représenter le maximum S de travail ou de puissance motrice susceptible d'être produit à l'aide d'un fluide élastique qu'on emploie à soutirer une certaine quantité de chaleur q' à une source chaude à la température t' et à verser une autre quantité de chaleur q dans une source froide à la température t.

La même aire quadrilatérale $BB'B'_1B_1$ me servait à représenter le minimum de travail à dépenser pour que, en procédant en sens inverse, le même fluide élastique pût être employé à soutirer une quantité de chaleur q à une source froide à la température t, et à verser une autre quantité de chaleur q' dans une source chaude à la température t'.

La figure quadrilatérale $BB'B'_1B_1$ et les premiers raisonnements qui s'y rapportent ont été empruntés au Mémoire de M. Clapeyron « sur

la puissance motrice de la chaleur » (*Journal de l'École Polytechnique*, tome XIV, 1834).

M. Clapeyron admettait avec M. Carnot l'égalité

$$q' = q,$$

et, dans cette hypothèse, il démontrait que l'on devait avoir

$$S = q \int_t^{t'} \frac{dt}{C}, \tag{1}$$

la lettre C servant à désigner une certaine fonction de la température qui serait la même pour tous les corps de la nature.

L'égalité $q' = q$ ayant été contestée, je me suis attaché à généraliser le mode de raisonnement de MM. Carnot et Clapeyron, et je suis parvenu à démontrer que l'on devrait avoir

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = \int_t^{t'} \frac{d[q\Gamma(t)]}{dt} dt, \tag{2}$$

la fonction $\Gamma(t)$ étant la même pour tous les corps de la nature.

A ce point de vue, $q\Gamma(t)$ sera la quantité de travail ou de force vive équivalente à une somme de chaleur q à une température donnée t. En d'autres termes, $q\Gamma(t)$ sera l'équivalent mécanique d'une somme de chaleur q à une température donnée t.

Mais, du moment où de la chaleur équivaudra à de la force vive, on sera conduit naturellement à supposer que ce que les physiciens parviennent à mesurer sous la dénomination d'une quantité de chaleur, n'est au fond que la somme de force vive susceptible d'être produite par une quantité de chaleur. Ce seraient des quantités de l'espèce $q\Gamma(t)$ que les physiciens parviendraient à mesurer, et, à ce point de vue, l'on devrait supposer

$$\Gamma(t) = \text{const. G}. \tag{3}$$

La même idée peut être présentée sous une forme un peu différente et plus explicite. Supposons que de la chaleur passe librement d'un corps chaud à un corps froid. Il n'y aura aucune production de travail ni aucune cause de perte, et, par conséquent, l'on devra ad-

mettre, non-seulement

$$q' = q,$$

mais encore

$$q'\Gamma(t') = q\Gamma(t);$$

par suite

$$\Gamma(t') = \Gamma(t) = \text{const. } G.$$

Quoi qu'il en soit de ces remarques, il est généralement admis aujourd'hui que l'on doit avoir

$$S = G(q' - q), \tag{4}$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, que ma formule (2) doit être complétée par la relation (3).

Mais il reste encore à trouver la loi des quantités q, q' pour chaque espèce de fluide élastique.

On sera toujours libre de représenter par

$$\varphi(v, p) = t, \quad \varphi(v, p) = t',$$

les équations des courbes BB_1, $B'B'_1$, et par

$$\psi(v, p) = u, \quad \psi(v, p) = u_1$$

les équations des courbes BB', $B_1B'_1$ de l'aire quadrilatérale à laquelle s'appliquera la formule (2).

Il sera permis aussi, au plus haut degré de généralité possible du sujet, de poser

$$q = \int_u^{u_1} f(t, u)\,du, \quad q' = \int_u^{u_1} f(t', u)\,du. \tag{5}$$

Il est encore évident que l'aire S représentée par la formule (2) pourra être exprimée au moyen des quantités t, t', u, u_1 d'après la nature des fonctions φ, ψ, en v, p, et que, par suite, une certaine condition devra être satisfaite entre les fonctions

$$\Gamma(t), \ f(t, u), \ \varphi(v, p), \ \psi(v, p).$$

On peut voir dans mon Mémoire de quelle manière je suis parvenu

à démontrer que cette condition reviendra exactement et uniquement à rendre une différentielle exacte le second membre de l'équation

$$dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv. \tag{6}$$

Il est d'ailleurs évident, à une simple inspection de l'équation (6), que Q représentera la quantité de travail susceptible d'être produite par la totalité de la chaleur qui se trouvera dans un fluide élastique. Q sera l'équivalent mécanique de cette quantité de chaleur.

Or j'ai voulu développer algébriquement à un aussi haut degré de généralité que celui-là toutes les questions susceptibles d'être posées au sujet d'un fluide élastique en ce qui concerne la chaleur latente, la chaleur sensible, la chaleur spécifique à pression constante, la chaleur spécifique à volume constant, la chaleur totale, et enfin la quantité de travail susceptible d'être produite ou d'être dépensée dans telle espèce d'opération expansive en même temps que calorifique qu'on voudra faire subir à un fluide élastique.

Mon but était d'avoir des formules préparées à l'avance pour le plus grand nombre sinon pour la totalité des expériences à venir des physiciens, et cela au plus haut degré possible de généralité du sujet.

En ce qui concerne les vapeurs, je n'ai pas été libre de conserver la relation générale

$$q = \int_u^{u_1} f(t, u)\, du.$$

D'après certaines propriétés physiques des vapeurs, il m'a fallu poser

$$\begin{cases} q = \displaystyle\int_u^{u_1} \gamma(t)\, du = \gamma(t)(u_1 - u), \\ q' = \displaystyle\int_u^{u_1} \gamma(t')\, du = \gamma(t')(u_1 - u), \end{cases} \tag{7}$$

mais je ne voyais pas de raison pour que la fonction $\gamma(t)$ dût être la même d'une espèce de vapeur à une autre.

J'ai d'ailleurs maintenu la variabilité de la fonction $\Gamma(t)$ dans tous mes calculs, en sorte que, si des expériences certaines sur des vapeurs faisaient trouver

$$\gamma(t) = \text{const.},$$

j'en conclurais

$$q' = q,$$

ce qui ramènerait ma formule (2) à la formule (1) de Clapeyron et Carnot.

Si, au contraire, des expériences sur des vapeurs faisaient trouver

$$\gamma(t') > \gamma(t) \quad \text{pour} \quad t' > t,$$

il me faudrait rejeter la formule (1), et je serais libre encore d'admettre, ou la formule (2) seulement, ou à la fois les formules (2) et (3), c'est-à-dire la formule (4).

Mais en aucun cas je ne saurais admettre simultanément les formules (1) et (4). Toutes les recherches en assez grand nombre qui ont été effectuées à ce point de vue par différents auteurs sont radicalement inexactes selon moi.

La question se trouvait dans l'état que je viens d'exposer, quand M. Clausius a publié son dernier Mémoire intitulé : « Sur une forme nouvelle du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur » (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XX, 1855).

Dans ce Mémoire, M. Clausius admet ou comme principe, ou plutôt comme premier théorème principal, la relation (4), puis il démontre un second théorème que je vais présenter sous une forme équivalente à celle de l'auteur, de la manière que voici :

Je remonte à l'aire quadrilatérale $BB'B'_1B_1$ de ma figure, et j'admets (à tort ou à raison) que, pour cette figure, on doive avoir

$$(a) \qquad S = G(q' - q).$$

Je conçois un second fluide élastique pour lequel on aura, pareillement,

$$(b) \qquad S_1 = G(q'_1 - q_1).$$

Je pose

$$(c) \qquad \begin{cases} q_1 = q + k, \\ q'_1 = q' + k', \end{cases}$$

et je trouve en place de la formule (b)

$$(b') \qquad S_1 = G(q' - q) + G(k' - k).$$

Or j'entends me servir du second fluide élastique, de manière que l'on ait

$$(d) \qquad S_1 = S,$$

et pour que cette égalité puisse être satisfaite, il faudra que l'on ait

$$k' = k,$$

de telle sorte que les équations (c) deviendront

$$(c') \qquad \begin{cases} q_1 = q + k. \\ q'_1 = q' + k. \end{cases}$$

Cela posé, je dis que l'équation (d) serait inadmissible si l'on n'avait pas en même temps

$$k = 0.$$

En effet, je pourrai me servir du premier fluide élastique en sens direct et du second fluide élastique en sens inverse, de manière à produire les effets que voici :

En me servant du premier fluide élastique, je produirai une quantité de travail S en soutirant une certaine quantité de chaleur q' à une source A′ à la température élevée t' et en versant une autre quantité de chaleur q dans une source A à la température basse t.

Puis, en me servant du second fluide élastique, je dépenserai une quantité de travail S_1 égale à S en soutirant une quantité de chaleur $q + k$ à la source A et en versant une quantité de chaleur $q' + k$ dans la source A′.

Il s'ensuit que la source A perdra

$$(q + k) - q = k,$$

et que la source A′ gagnera

$$(q' + k) - q' = k,$$

c'est-à-dire que le résultat définitif de la double opération consistera

à faire passer une certaine quantité k de chaleur d'un corps froid dans un corps chaud avec une dépense de travail $S_1 - S$ égale à zéro, alors que chacun des deux fluides élastiques se trouvera ramené exactement à son état initial.

Si k était négatif, j'opérerais avec chacun des deux fluides élastiques en sens contraire, et le résultat final serait le même.

Or on doit admettre qu'il est *absurde*, non-seulement de *produire du travail avec rien* (axiome de Carnot), ce qui conduit généralement à l'équation (2) et exceptionnellement à l'équation (4), mais encore de *faire passer de la chaleur d'un corps froid dans un corps chaud avec rien* (axiome de M. Clausius), ce qui exigera que, pour

$$S_1 = S,$$

on ait

$$k = 0.$$

Il s'ensuit donc qu'avec des fluides élastiques quelconques auxquels s'appliqueront respectivement les équations (a), (b), il sera impossible que l'on ait

$$S_1 = S$$

sans que l'on n'ait en même temps

$$q_1 = q,$$
$$q'_1 = q'.$$

Par suite il faudra que, pour

$$S_1 = nS,$$

on ait

$$q_1 = nq,$$
$$q'_1 = nq',$$

et, par conséquent, dans l'entière généralité de la question (c'est-à-dire quel que soit n),

$$(e) \qquad \frac{q'_1}{q_1} = \frac{q'}{q}.$$

Or il est directement évident qu'entre deux courbes données Bu,

$B_1 u_1$ de ma figure, pour un fluide donné, il y aura toujours à concevoir une certaine fonction $\gamma(t)$ qui sera telle, qu'*entre les deux courbes données* Bu, $B_1 u_1$ *de ce fluide-là*, on aura

$$(f) \qquad \frac{q'}{q} = \frac{\gamma(t')}{\gamma(t)},$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$(f') \qquad \frac{q'}{\gamma(t')} = \frac{q}{\gamma(t)},$$

et, d'après la formule (e), il faudra que la même relation soit applicable à tous les autres cas.

C'est en cela que consiste le second théorème principal de M. Clausius.

D'après ce théorème, mes formules (7) subsisteront non-seulement pour les vapeurs, mais aussi pour les gaz permanents, et la fonction $\gamma(t)$ que je regardais comme étant susceptible de varier d'un cas à un autre sera la même pour tous les fluides élastiques de la nature.

La formule (4) deviendra

$$(8) \qquad \begin{cases} S = G(q' - q) = G(u_1 - u)[\gamma(t') - \gamma(t)] \\ \qquad\qquad = G(u_1 - u)\displaystyle\int_t^{t'} \frac{d\gamma(t)}{dt}\, dt, \end{cases}$$

et de la comparaison de ce résultat définitif de la théorie de M. Clausius avec la formule (1) résultera cette conséquence singulière que ce sera la quantité $G(u_1 - u)$, dont la signification physique n'a pas encore été expliquée, qui jouera par rapport à une différence thermométrique $t' - t$, et au moyen d'une certaine fonction universelle

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt},$$

le même rôle que celui que Carnot et Clapeyron voulaient faire jouer à une somme de chaleur q par rapport à la même différence $t' - t$, au moyen de leur fonction universelle

$$\frac{1}{C}\ [*].$$

[*] Mon but n'a jamais été de m'occuper de ces matières comme physicien, mais

Mais l'essentiel est, qu'au point de vue de M. Clausius, ma formule (6) se réduira à

$$dQ = G\gamma(t)\,du - p\,dv.$$

---

seulement comme logicien, particulièrement en ce qui concerne le perfectionnement de la théorie des machines motrices, et, à ce point de vue, le second théorème principal de M. Clausius combiné avec d'autres relations connues, entraînera les conséquences majeures que voici :

1°. De quelque espèce de vapeurs ou de gaz que l'on veuille faire usage entre deux températures données t, t', pourvu que l'on satisfasse à toutes les conditions requises pour qu'aucune perte ne doive être mise en ligne de compte, il arrivera que, par rapport à une même quantité de chaleur initiale q', une même partie aliquote $q' - q$ se trouvera détruite, et que, par suite (en physique rationnelle), toutes les espèces de vapeurs ou de gaz seront parfaitement équivalentes.

2°. Le point essentiel sera que chaque espèce de fluide élastique soit employé entre des températures t, t' aussi écartées que possible.

3°. L'emploi de vapeurs saturées ne permettant pas de faire augmenter la différence $t' - t$ au delà de 50 à 100 degrés, sans que les pressions à la chaudière ne deviennent très-grandes, on est conduit naturellement, soit à accoupler plusieurs espèces de vapeurs saturées (machines binaires à éther ou à chloroforme, etc.), soit à substituer à des vapeurs saturées des vapeurs surchauffées ou des gaz.

4°. Avec des vapeurs surchauffées ou avec des gaz, il faudra qu'on fasse usage de toiles métalliques.

5°. En employant soit des vapeurs accouplées, soit des vapeurs surchauffées ou des gaz, on ne saurait guère faire augmenter pratiquement la différence $t' - t$ au delà de 300 degrés, en sorte que, dans l'un comme dans l'autre cas [la fonction $\gamma(t)$ étant supposée approximativement de l'espèce $\gamma(t) = a + bt$] on ne saurait guère se flatter de parvenir à réduire la consommation de combustible d'une machine motrice au-dessous de

$$\frac{50}{300} = \frac{1}{6} \quad \text{à} \quad \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

de celle d'une machine à vapeur d'eau saturée.

Or toutes ces conséquences résultaient primitivement de la loi de Carnot. Il s'ensuit que les nouvelles doctrines sur la chaleur, complétées par le second théorème principal de M. Clausius, ramèneront la théorie des machines motrices *à très-peu près* au même point que celui où cette théorie se trouvait dès 1824 par la doctrine, reconnue inexacte aujourd'hui, de Carnot.

Pour qu'on pût avoir l'espoir de faire faire à la théorie des machines motrices des progrès plus considérables que ceux-là, il faudrait que de nouveaux faits physiques fussent découverts et pussent être invoqués dans le cours des raisonnements auxquels je me suis livré à ce sujet.

Quand ensuite il s'agira d'un gaz, on devra, en vertu de la loi de Mariotte, admettre une relation de la forme

$$pv = a(t).$$

Quand il s'agira d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, on devra admettre une relation de la forme

$$p = \Omega(t).$$

Ces deux relations distinctes sont des cas particuliers de la relation plus générale

$$p = a(t)\,\frac{d\varepsilon(v)}{dv} = a(t)\,\varepsilon'(v). \tag{9}$$

Il s'ensuit que la théorie des gaz et celle des vapeurs pourront être envisagées comme des cas particuliers de la question plus générale qui aurait pour objet de rendre une différentielle exacte le second membre de l'équation

$$dQ = G\gamma(t)\,du - a(t)\,\varepsilon'(v)\,dv. \tag{8 bis}$$

Or on peut voir dans mon Mémoire comment la résolution de cette question exigera que l'on ait

$$Gu = \frac{a'(t)}{\gamma'(t)}\,\varepsilon(v) + \int \frac{\beta'(t)}{\gamma(t)}\,dt, \tag{10}$$

$$Q = \left[\frac{\gamma(t)\,a'(t)}{\gamma'(t)} - a(t)\right]\varepsilon(v) + \beta(t), \tag{11}$$

$\beta(t)$ étant une fonction arbitraire de t qui pourra être différente d'un fluide élastique à un autre.

On peut vérifier à postériori qu'au moyen des équations (10), (11), l'équation (8 *bis*) sera satisfaite.

On trouvera enfin que mes équations (7) pourront être remplacées par

$$\left.\begin{aligned} &Gdq = G\gamma(t)\,du \\ &= \frac{\gamma(t)\,a'(t)}{\gamma'(t)}\,\varepsilon'(v)\,dv + \left\{\varepsilon(v)\,\gamma(t)\,\frac{d}{dt}\left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)}\right] + \beta'(t)\right\}dt. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Les équations (9), (10), (11), (12) serviront aux usages que voici :

Quand on regardera t comme constant, l'équation (9) représentera les courbes BB_1, $B'B'_1$ de la figure.

Quand on regardera u comme constant, l'équation (10) représentera les courbes BB', $B_1B'_1$ de la figure.

Le second membre de l'équation (11) représentera la quantité de travail susceptible d'être produite par la totalité de la chaleur qui se trouvera dans un fluide élastique.

Le second membre de l'équation (12) représentera le produit de la constante G par la somme de chaleur dq qui devra être fournie à un fluide élastique pour que les variables indépendantes v, t éprouvent des accroissements arbitraires dv, dt.

En différentiant l'équation (9), on aura pour l'accroissement correspondant de p

$$dp = a(t)\,\varepsilon''(v)\,dv + a'(t)\,\varepsilon'(v)\,dt. \tag{13}$$

Cela posé, quand on fera $t = \text{const.}$, on trouvera de v à v_1 le long de la courbe BB_1 de la figure :

$$\begin{cases} Q_1 - Q = \left[\dfrac{\gamma(t)\,a'(t)}{\gamma'(t)} - a(t)\right]\left[\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v)\right], \\ Gq = G\gamma(t)\,(u_1 - u) = \dfrac{\gamma(t)\,a'(t)}{\gamma'(t)}\left[\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v)\right]. \end{cases} \tag{14}$$

La seconde des équations (14) représentera le produit de la constante G par la quantité de *chaleur latente* d'un fluide élastique de v à v_1.

Quand on fera $u = \text{const.}$, on trouvera de v à v' le long de la courbe BB' de la figure,

$$\begin{cases} Q' - Q = -\displaystyle\int_v^{v'} p\,dv = +\text{ aire } BB'A'A, \\ \displaystyle\int G\,dq = 0. \end{cases} \tag{15}$$

La chaleur spécifique c_0 à pression constante et la chaleur spécifique c_1 à volume constant pourront être déterminées comme il suit :

En supposant $v = \text{const.}$, on déduira immédiatement de l'équa-

tion (12) :

$$(16) \qquad G c_1 = \varepsilon(v)\gamma(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)}\right] + \beta'(t).$$

En supposant, au contraire, $p = \text{const.}$, on déduira de l'équation (13)

$$dv = -\frac{\varepsilon'(v)}{\varepsilon''(v)}\frac{a'(t)}{a(t)}dt,$$

et en substituant cette valeur de dv dans l'équation (12), on trouvera

$$(17) \quad Gc_0 = \left\{\varepsilon(v)\gamma(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)}\right] + \beta'(t)\right\} - \frac{[\varepsilon'(v)]^2}{\varepsilon''(v)}\frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)}\frac{[a'(t)]^2}{a(t)}.$$

De ces deux équations on conclura

$$(18) \qquad G(c_0 - c_1) = -\frac{[\varepsilon'(v)]^2}{\varepsilon''(v)}\frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)}\frac{[a'(t)]^2}{a(t)}.$$

Il y a à faire remarquer maintenant que les formules (9),..., (18) conviendront spécialement au cas des gaz quand on y fera

$$\varepsilon'(v) = \frac{1}{v};$$

par suite

$$\varepsilon(v) = \log \text{hyp. } v,$$
$$\varepsilon''(v) = -\frac{1}{v^2},$$

et

$$-\frac{[\varepsilon'(v)]^2}{\varepsilon''(v)} = +1;$$

ce qui fera trouver

$$(18\ bis) \qquad G(c_0 - c_1) = +\frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)}\frac{[a'(t)]^2}{a(t)}.$$

Les mêmes formules conviendront spécialement à un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, quand on y fera

$$\varepsilon'(v) = 1,$$

par suite

$$\varepsilon(v) = v,$$
$$\varepsilon''(v) = 0.$$

On trouvera dans ce cas-là

$$G(c_0 - c_1) = \infty \quad \text{et} \quad c_0 = \infty,$$

et pour l'expression de la chaleur latente, d'après la seconde des formules (14),

$$(19) \qquad Gq = \frac{\gamma(t)\,a'(t)}{\gamma'(t)}(v_1 - v).$$

Soient

w le volume d'un liquide à une température t et sous la pression de vaporisation $p = \Omega(t)$ ou $p = a(t)$ à cette température;

W le volume correspondant de vapeur du liquide à la température t;

L la chaleur latente.

La formule (19) deviendra

$$(19\ bis) \qquad GL = \frac{\gamma(t)\,a'(t)}{\gamma'(t)}(W - w),$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$(20) \qquad G\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{W - w}{L}\frac{dp}{dt},$$

et comme, d'après le second théorème principal de M. Clausius, la fonction $\gamma(t)$ devra être la même pour tous les fluides élastiques de la nature, il faudra que la valeur du second membre de l'équation (20) soit absolument indépendante de la nature du liquide qui aura servi à produire une espèce de vapeur saturée.

De plus, on voit que si les physiciens parvenaient à déterminer expérimentalement les quantités

$$W - w,\ L,\ \frac{dp}{dt}$$

pour une espèce de vapeur saturée à différentes températures t, on trouverait, au moyen de l'équation (20), la nature de la fonction $\gamma(t)$ dans l'intervalle des expériences, au facteur G près.

Dans le cas d'un gaz, la seconde des formules (14) prendra la forme analogue

$$(21) \qquad G\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\log\text{hyp.}\,v_1 - \log\text{hyp.}\,v}{q}a'(t) = \frac{\log\text{hyp.}\,\frac{v_1}{v}}{q}\frac{dp}{dt}.$$

Je remonte à la formule (12), et je la transforme en

$$G\,dq = \gamma(t)\,d\left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)}\varepsilon(v)\right] + \beta'(t)\,dt, \tag{22}$$

puis, en y faisant

$$\varepsilon(v) = v,$$

pour le cas d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, je désigne par

$$c'(t)\,dt,$$

la quantité de chaleur sensible qui devra être fournie au liquide le long de la courbe

$$v = w,$$

et par

$$C'(t)\,dt$$

la quantité de chaleur qui devra être fournie à la vapeur de ce liquide le long de la courbe

$$v = W.$$

Je trouve de cette manière

$$\begin{cases} G\,c'(t) = \gamma(t)\,\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{a'(t)}{\gamma'(t)}w\right] + \beta'(t), \\ GC'(t) = \gamma(t)\,\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{a'(t)}{\gamma'(t)}W\right] + \beta'(t); \end{cases} \tag{23}$$

et en soustrayant les deux équations l'une de l'autre,

$$G\,[C'(t) - c'(t)] = \gamma(t)\,\frac{d}{dt}\left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)}(W - w)\right]; \tag{24}$$

d'autre part, je conclus de la formule (19 *bis*)

$$\frac{a'(t)}{\gamma'(t)}(W - w) = \frac{GL}{\gamma(t)},$$

et, par suite, la formule (24) deviendra

$$C'(t) - c'(t) = \gamma(t)\,\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{\gamma(t)}\right],$$

puis, en développant le second membre

$$C'(t) - c'(t) = \frac{dL}{dt} - L\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)},$$

d'où

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{1}{L}\left[\frac{dL}{dt} + c'(t) - C'(t)\right], \tag{25}$$

ce qui fera une autre équation dont le second membre devra être parfaitement indépendant de la nature du liquide qui aura servi à produire de la vapeur saturée.

Au delà de la courbe

$$v = W$$

une vapeur deviendra un gaz. A la jonction de ces deux états, la quantité Q devra être la même.

Or, en deçà de la courbe en question, la formule (11) sera

$$Q = \left[\frac{\gamma(t)\,a'(t)}{\gamma'(t)} - a(t)\right]v + \beta(t);$$

et si l'on suppose qu'à partir de la limite

$$v = W,$$

la loi de Mariotte sera immédiatement applicable, il faudra qu'au delà de cette limite on ait [en remplaçant $a(t)$, $\beta(t)$ par $a_1(t)$, $\beta_1(t)$]

$$Q_1 = \left[\frac{\gamma(t)\,a'_1(t)}{\gamma'(t)} - a_1(t)\right]\log\text{hyp. } v + \beta_1(t);$$

en faisant ensuite

$$v = W,$$

et

$$Q = Q_1,$$

on trouvera

$$\left[\frac{\gamma(t)\,a'(t)}{\gamma'(t)} - a(t)\right]W + \beta(t) = \left[\frac{\gamma(t)\,a'_1(t)}{\gamma'(t)} - a_1(t)\right]\log\text{hyp. } W + \beta_1(t),$$

et de là aussi on pourrait dégager le rapport de $\gamma'(t)$ à $\gamma(t_1$, etc.

La fonction $\gamma(t)$ devant être la même pour tous les fluides élastiques de la nature (d'après le second théorème principal de M. Clausius), il s'ensuit qu'il devra être possible de former une échelle thermométrique au moyen de laquelle on aura simplement

$$(26)\qquad \begin{cases} \gamma(t) = t, \\ \gamma'(t) = 1, \end{cases}$$

et, en déplaçant l'origine,

$$\gamma(t) = \mathrm{B} + t.$$

Mais il restera à savoir si une telle échelle thermométrique ne différerait pas beaucoup de l'échelle ordinaire d'un thermomètre à mercure, ou bien de celle d'un thermomètre à air.

Quand on se servira d'un thermomètre à air pour mesurer les températures, et que la formule (9) devra être appliquée à une masse d'air, on aura pour la fonction $a(t)$ une expression de la forme

$$(27)\qquad a(t) = \mathrm{A}\,[m + t]$$

(le nombre m étant égal à 273 environ), et par suite

$$a'(t) = \mathrm{A}.$$

Mais il restera à savoir si, dans ce cas-là, il sera permis de poser

$$(28)\qquad \gamma(t) = \mathrm{B} + t.$$

Si les deux relations étaient admissibles simultanément, les équations (10), (11), (12) deviendraient

$$(29)\qquad \begin{cases} \mathrm{G}u = \mathrm{A}\log\text{hyp.}\,v + \displaystyle\int \frac{\beta'(t)}{\mathrm{B}+t}\,dt, \\ \mathrm{Q} = \mathrm{A}(\mathrm{B} - m)\log\text{hyp.}\,v + \beta(t), \\ \mathrm{G}\,dq = \mathrm{A}(\mathrm{B}+t)\dfrac{dv}{v} + \beta'(t)\,dt, \end{cases}$$

et les équations (16), (17), (18),

$$(30)\qquad \begin{cases} \mathrm{G}c_1 = \beta'(t), \\ \mathrm{G}c_0 = \beta'(t) + \mathrm{A}\dfrac{\mathrm{B}+t}{m+t}, \\ \mathrm{G}(c_0 - c_1) = \mathrm{A}.\dfrac{\mathrm{B}+t}{m+t}. \end{cases}$$

Il y a une expérience de M. Regnault qui consiste à faire communiquer tout à coup une capacité pleine d'air et une capacité vide, puis à constater le changement de température de la masse d'air dilatée. On sait que ce changement a été trouvé égal à zéro.

Or la loi algébrique de cette expérience (supposée faite dans une enveloppe non perméable à la chaleur) s'exprimera en égalant à une constante le second membre de l'équation (11).

Il s'ensuit que la température de l'air ne pourra être la même avant et après la dilatation qu'autant qu'on aura

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{a(t)}{\gamma(t)}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{a(t)}{\gamma(t)} = \text{const. C.}$$

Or, avec un thermomètre à air, on aura

$$a(t) = \mathrm{A}(m + t);$$

donc

$$\gamma(t) = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}(m + t). \tag{31}$$

Les équations (10), (11), (12) deviendront

$$\begin{cases} \mathrm{G}u = \mathrm{C}\log\text{hyp.}\ v + \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\displaystyle\int \frac{\beta'(t)}{m+t}, \\ \mathrm{Q} = \beta(t), \\ \mathrm{G}\,dq = \mathrm{A}(m+t)\dfrac{dv}{v} + \beta'(t)\,dt, \end{cases} \tag{32}$$

et les équations (16), (17), (18),

$$\begin{cases} \mathrm{G}c_1 = \beta'(t), \\ \mathrm{G}c_0 = \beta'(t) + \mathrm{A}, \\ \mathrm{G}(c_0 - c_1) = \mathrm{A} = \text{const.} \end{cases} \tag{33}$$

Il s'ensuit que la valeur de la constante C n'influera ni sur l'expression de Q ni sur celles de $\mathrm{G}\,dq$, $\mathrm{G}c_0$, $\mathrm{G}c_1$.

Il n'y aura que la quantité conventionnelle u qui changera proportionnellement à C, et le plus simple sera de faire

$$C = A.$$

Les résultats que l'on trouvera dans ce cas-là au moyen des formules (32), (33) seront les mêmes que ceux que l'on déduira des formules (29) et (30), quand on y fera

$$B = m.$$

Mais en supposant que de telles relations se vérifient pour de l'air, on ne saurait les appliquer à des gaz pour lesquels le nombre m de la relation

$$a(t) = A(m + t)$$

ne serait pas le même.

On ne saurait non plus les appliquer à des vapeurs saturées.

De l'équation (20) on conclurait pour une vapeur saturée quelconque

$$\frac{W - w}{L}\frac{dp}{dt}(m + t) = \text{const. } G. \tag{34}$$

Telles sont les relations les plus saillantes que l'on déduira des formules de ma *théorie générale des effets dynamiques de la chaleur* quand on y fera

$$\Gamma(t) = \text{const. } G,$$

et que de plus, d'après le second théorème principal de M. Clausius, on y regardera la fonction $\gamma(t)$ comme devant être la même pour tous les fluides élastiques de la nature.

SUR

UNE PROPRIÉTÉ DES FORMES QUADRATIQUES

A DÉTERMINANT POSITIF;

PAR M. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

[Extrait des *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* (juillet 1855), et librement traduit par l'auteur.]

Comme la propriété des formes quadratiques que je me propose de faire connaître dans cette Note est liée intimement à la théorie de l'équation

$$t^2 - Du^2 = 1, \tag{1}$$

je commencerai par quelques remarques sur cette équation dans laquelle l'entier positif donné D est supposé non carré, et dont nous n'aurons à considérer que les solutions exprimées en entiers positifs t et u.

On sait que si l'on désigne par T, U les plus petits entiers positifs, satisfaisant à l'équation proposée, toutes les solutions positives de l'équation seront données par la formule

$$(T + U\sqrt{D})^n = t_n + u_n\sqrt{D},$$

où il faut attribuer à n successivement toutes les valeurs entières depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. Parmi les valeurs que l'on obtient ainsi pour u_n, il y en a une infinité qui sont divisibles par un entier quelconque S (positif), et l'on prouve facilement que si N désigne le plus petit indice n, pour lequel cette condition a lieu, les autres valeurs convenables de n forment la suite des multiples successifs de N. Pour nous en assurer, soit $D' = DS^2$, et considérons l'équation

$$t'^2 - D'u'^2 = 1,$$

qui a la même forme que celle (1). On voit qu'en posant $t = t'$, $u = Su'$, toute solution de cette dernière donnera une solution de l'équation (1), pour laquelle u est divisible par S, et *vice versâ;* l'assertion avancée plus haut se trouve donc justifiée, et l'on reconnaît de plus que l'entier N est donné par l'équation

$$(T + U\sqrt{D})^N = T' + U'\sqrt{D'},$$

T′ et U′ désignant les plus petites valeurs positives de t' et u'.

L'exposant N peut être assigné sans que l'on détermine préalablement T′ et U′; il suffit de connaître pour chacun des diviseurs premiers p de S le plus petit indice ν tel que u_ν soit divisible par p, et de savoir en même temps quelle est la puissance la plus élevée p^δ de p qui divise u_ν. Dans la double supposition qu'on vient de faire, on peut indiquer immédiatement l'exposant de la plus haute puissance de p contenue dans $u_{\nu e}$, e étant un entier arbitrairement choisi. L'exposant dont il s'agit est $\delta + \varepsilon$, si ε, qui peut d'ailleurs se réduire à zéro, désigne celui de la puissance la plus élevée de p qui divise e.

Pour reconnaître la vérité de ce qui vient d'être avancé, soient θ et η deux entiers qui satisfassent à l'équation (1), et soit de plus p^k (k différant de zéro) la plus haute puissance de p contenue dans η. Si de cette solution nous déduisons une solution nouvelle au moyen de la formule

$$(\theta + \eta\sqrt{D})^m = t + u\sqrt{D},$$

nous aurons

$$u = \eta\left(m\theta^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\theta^{m-3}\eta^2 D + \text{etc.}\right),$$

et il est manifeste, θ n'étant pas divisible par p, que la puissance la plus élevée de p contenue dans u sera p^k, si m n'est pas divisible par p. et que cette puissance sera p^{k+1} si l'on suppose $m = p$. Or l'élévation à une puissance quelconque pouvant se réduire à la combinaison des deux cas particuliers précédents, le résultat énoncé plus haut se trouve établi.

D'après la propriété qui vient d'être démontrée, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $u_{\nu e}$ soit divisible par une puis-

sance quelconque p^{α}, où $\alpha > 0$, consiste en ce que e doit avoir le facteur $p^{\alpha-\delta}$, l'exposant $\alpha - \delta$, s'il devient négatif, devant être remplacé par zéro.

Si maintenant nous nous servons d'indices pour désigner les nombres premiers inégaux p contenus dans S, et les valeurs correspondantes de ν et δ, et que nous posions

$$S = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots,$$

l'exposant cherché N sera, d'après ce qui précède, le plus petit multiple commun des nombres

$$\nu_1 p_1^{\alpha_1 - \delta_1}, \quad \nu_2 p_2^{\alpha_2 - \delta_2}, \dots,$$

et l'on voit sans peine que si, sans introduire de nouveaux facteurs premiers dans S, on fait croître indéfiniment tous les exposants α_1, $\alpha_2, \dots$, le quotient $\frac{S}{N}$ finira bientôt par ne plus varier, en conservant une valeur indépendante de celles de α_1, $\alpha_2, \dots$.

Le théorème que nous venons d'établir sur l'équation (1) donne lieu à une conséquence remarquable qui se rapporte à la théorie des formes quadratiques à déterminant positif. Si aux suppositions précédemment énoncées, nous ajoutons celle que D n'ait pas de diviseur carré, que nous désignions par h le nombre des classes dans lesquelles se distribuent les formes quadratiques ayant D pour déterminant commun, et que nous donnions à la lettre h' une signification analogue relativement au déterminant $D' = DS^2$, nous aurons l'équation que voici :

$$h' = h \frac{\log(T + U\sqrt{D})}{\log(T' + U'\sqrt{D'})} SR,$$

et que j'ai établie dans mon Mémoire : *Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres*, 2e partie. Quant à la quantité R qui y entre et dont nous n'avons pas eu à parler plus haut, il suffira pour notre objet de rappeler que cette quantité dépend à la vérité des nombres premiers p_1, $p_2, \dots$, mais nullement des exposants α_1, $\alpha_2, \dots$. Notre équation pouvant se mettre sous la forme

$$h' = h \frac{S}{N} R,$$

nous concluons du résultat précédemment établi que de tout déterminant positif D, on peut déduire une infinité d'autres déterminants de la forme DS^2, ayant tous le même nombre de classes. En choisissant convenablement l'entier D et les nombres premiers p_1, p_2,..., on peut faire en sorte, et cela d'une infinité de manières, que le nombre invariable des classes coïncide pour toute cette série infinie de déterminants avec celui des genres, ce qui confirme la conjecture énoncée par l'illustre auteur des *Disq. arith.* (*voir* art. **304**), et d'après laquelle les déterminants positifs possédant une seule classe dans chacun des genres qui leur correspondent forment une suite infinie. C'est là un phénomène analytique d'autant plus remarquable, que les déterminants négatifs jouissant de la même propriété ne paraissent être qu'en nombre fini et même très-restreint. Si l'on peut s'en rapporter à une induction portée très-loin (jusqu'à 10 000 si je ne me trompe) d'abord par Euler qui s'est occupé de ces mêmes nombres sous le nom de *numeri idonei*, c'est-à-dire de nombres propres à faire trouver des nombres premiers très-grands, à une époque où la théorie des formes quadratiques, fondée par Lagrange, n'existait pas encore, et plus tard par Gauss, les déterminants négatifs dont il s'agit ne seraient qu'au nombre de 65, et le plus grand de ces déterminants, abstraction faite du signe, aurait pour valeur 1848.

SUR

UN THÉORÈME RELATIF AUX SÉRIES,

PAR M. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Le théorème que je vais établir d'une manière nouvelle est le même qui m'a servi comme lemme dans plusieurs Mémoires précédents. La démonstration que j'en ai donnée dans le premier de ces Mémoires [*] suppose une certaine condition qui, bien qu'elle se trouve remplie dans la plupart des applications qu'on peut faire du lemme, n'est pas indispensable, comme j'en ai déjà fait la remarque ailleurs, et comme on pourra au reste le voir dans ce qui va suivre.

Je commence par un cas particulier très-simple et qui consiste en ce que, a et b désignant des constantes positives et ρ une variable également positive, on a

$$\lim \rho \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(b+na)^{1+\rho}} = \frac{1}{a},$$

la limite se rapportant au décroissement indéfini de ρ. Pour démontrer ce cas particulier, considérons l'intégrale

$$\int_b^\infty \frac{dx}{x^{1+\rho}} = \frac{1}{\rho b^\rho}$$

comme l'aire d'une courbe ayant x pour abscisse ; cette courbe se rapprochant de plus en plus de l'axe des x, si l'on mène des parallèles à cet axe par les extrémités des ordonnées qui répondent à $x = b$, $b + a$, etc., on aura des rectangles extérieurs et intérieurs à notre aire, et l'on conclura sur-le-champ que la somme dont il s'agit d'avoir la limite, se trouve comprise entre les deux quantités

$$\frac{1}{ab^\rho} - \frac{\rho}{b^{1+\rho}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{ab^\rho};$$

dont la limite commune est $\frac{1}{a}$.

Pour passer maintenant au théorème général, soient

$$k_1, \; k_2, \; k_3, \ldots, \; k_n, \ldots,$$

des constantes positives rangées par ordre de grandeur croissante, de sorte que $k_n \leqq k_{n+1}$, et supposons que ces constantes soient telles, qu'en désignant par t une variable continue et positive, et par T le nombre des termes de notre suite qui ne surpassent pas t, le rapport

$$\frac{\mathrm{T}}{t}$$

converge vers la limite finie α lorsque t croît indéfiniment. Cela supposé, je dis que cette

[*] *Journal de Crelle*, tome XIX.

même quantité α sera aussi la limite de la somme

$$\rho \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{k_n^{1+\rho}} \tag{1}$$

pour une valeur infiniment petite de ρ.

D'après la condition supposée, on peut, δ désignant un nombre aussi petit que l'on voudra, en choisir un autre τ assez grand pour que, t surpassant τ, on ait constamment

$$\alpha - \delta < \frac{\mathrm{T}}{t} < \alpha + \delta.$$

Cela fait, soit N la valeur de T qui répond à $t = \tau$, et ne considérons d'abord que les termes de notre série ayant un indice $n > \mathrm{N}$. Un pareil terme k_n peut présenter deux cas, selon que l'on aura $k_n < k_{n+1}$ ou $k_n = k_{n+1}$. Dans le premier cas, la valeur de T qui répond à $t = k_n$ sera n, et l'on aura

$$\alpha - \delta < \frac{n}{k_n} < \alpha + \delta.$$

Dans le second cas, soit, parmi les termes qui suivent k_n, $k_{n'}$ le dernier qui soit encore égal à k_n; soit de plus, parmi les termes précédents, k_m le premier dont la valeur soit inférieure à celle de k_n. Si maintenant nous faisons croître t à partir de $t = k_m$, T restera invariablement égal à m, tant que t n'atteindra pas la valeur $k_{n'}$, et notre rapport $\frac{\mathrm{T}}{t}$ approchant ainsi indéfiniment de $\frac{m}{k_{n'}}$, en même temps qu'il reste toujours supérieur à $\alpha - \delta$, nous aurons

$$\frac{m}{k_{n'}} > \alpha - \delta.$$

Mais comme par le premier cas nous avons aussi $\frac{m'}{k_{m'}} < \alpha + \delta$, et en outre $m < n < m'$, $k_n = k_{n'}$, nous conclurons, comme précédemment,

$$\alpha - \delta < \frac{n}{k_n} < \alpha + \delta.$$

Cette double inégalité étant mise sous la forme

$$(\alpha - \delta)^{1+\rho} \frac{\rho}{n^{1+\rho}} < \frac{\rho}{k_n^{1+\rho}} < (\alpha + \delta)^{1+\rho} \frac{\rho}{n^{1+\rho}},$$

si nous sommons depuis $n = \mathrm{N} + 1$ jusqu'à $n = \infty$, il viendra

$$(\alpha - \delta)^{1+\rho} \cdot \rho \sum \frac{1}{n^{1+\rho}} < \rho \sum \frac{1}{k_n^{1+\rho}} < (\alpha + \delta)^{1+\rho} \cdot \rho \sum \frac{1}{n^{1+\rho}}.$$

Or l'expression $\rho \sum \frac{1}{n^{1+\rho}}$ rentrant dans le cas particulier examiné plus haut, en supposant $b = \mathrm{N} + 1$, $a = 1$, et ayant par suite l'unité pour limite, on voit que la partie de notre somme (1), qui s'étend depuis $n = \mathrm{N} + 1$ jusqu'à $n = \infty$, finira par rester comprise entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$, le nombre ε étant tant soit peu supérieur à δ et par conséquent, comme ce dernier, d'une petitesse arbitraire, et comme en même temps la première partie qui n'a qu'un nombre fini N de termes, converge évidemment vers zéro, il s'ensuit que la limite de l'expression (1) est en effet α; C. Q. F. D.

Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples, et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions gamma *de Legendre;*

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. L'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-\left(\alpha^2+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)} d\alpha$$

est, comme on sait, égale à

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2k},$$

k désignant une quantité quelconque positive ou nulle. En y remplaçant α par $\sqrt{\alpha}$ et doublant sa valeur, on a donc

$$\int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha = \sqrt{\pi}\, e^{-2k}. \tag{1}$$

J'ignore si l'on a remarqué déjà que la formule

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 2^{1-\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu),$$

où $\Gamma(\mu)$ désigne, suivant la notation de Legendre, l'intégrale eulérienne de seconde espece

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{\mu-1} d\alpha,$$

est une conséquence immédiate de l'équation (1). Il suffit de multiplier les deux membres de l'équation (1) par $k^{\mu-1}\,dk$, puis d'intégrer de $k=0$ à $k=\infty$. Cela donne en effet, en changeant l'ordre des intégra-

tions pour α et k,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{\frac{1}{2}-1}\,d\alpha\int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{\alpha}}k^{\mu-1}\,dk=\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-2k}k^{\mu-1}\,dk.$$

Or on a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{\alpha}}k^{\mu-1}\,dk=\frac{1}{2}\alpha^{\frac{\mu}{2}}\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{\frac{\mu}{2}-1}\,d\beta=\frac{1}{2}\alpha^{\frac{\mu}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)$$

et

$$\int_0^\infty e^{-2k}k^{\mu-1}\,dk=\frac{\Gamma(\mu)}{2^\mu}.$$

Substituant et multipliant par 2, on arrive à la formule citée.

2. Je me propose, dans cette Note, d'étendre la même analyse à la démonstration de la formule générale que l'on doit à Gauss :

$$(A)\qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-\mu}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\mu).$$

Je regarde comme connue l'équation d'Euler

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

qu'on établit aisément par différents moyens. Mais j'ai besoin de trouver d'abord les valeurs d'une classe d'intégrales multiples, très-remarquables du reste en elles-mêmes, et qui peuvent être appliquées utilement à la recherche des intégrales de certaines équations aux différences partielles.

Ainsi pour le cas de $n=3$, c'est-à-dire pour démontrer la formule

$$(B)\qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right)=3^{\frac{1}{2}-\mu}.2\pi.\Gamma(\mu),$$

je me sers de l'intégrale double

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^3}{\alpha\beta}\right)}\alpha^{\frac{1}{3}-1}\beta^{\frac{2}{3}-1}\,d\alpha\,d\beta,$$

dont je prouve que la valeur est

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)e^{-3k},$$

ou

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-3k}.$$

Admettant en effet qu'on a

$$(2)\cdot\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^3}{\alpha\beta}\right)}\alpha^{\frac{1}{3}-1}\beta^{\frac{2}{3}-1}\,d\alpha\,d\beta=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-3k},$$

multipliez les deux membres par $k^{\mu-1}dk$ et intégrez de $k=0$ à $k=\infty$. L'intégration par rapport à k s'effectuera sous les signes $\int$ en observant que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{k}{\alpha\beta}}k^{\mu-1}\,dk=\frac{1}{3}(\alpha\beta)^{\frac{\mu}{3}}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right),$$

et le premier membre deviendra

$$\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)}\alpha^{\frac{\mu+1}{3}-1}\beta^{\frac{\mu+2}{3}-1}\,d\alpha\,d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right);$$

quant au second membre, on trouve

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^\infty e^{-3k}k^{\mu-1}\,dk,$$

ou

$$\frac{2\pi}{3^\mu\sqrt{3}}\Gamma(\mu).$$

De là

$$\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right)=\frac{2\pi}{3^\mu\sqrt{3}}\Gamma(\mu),$$

et, en multipliant par 3, la formule (B).

En général, l'intégrale définie à $(n-1)$ variables

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1},$$

que je désignerai par R, a pour valeur

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}e^{-nk},$$

et il suffit de multiplier par $k^{\mu-1}\,dk$ les deux membres de l'équation qui exprime ce fait, puis d'intégrer de $k=0$ à $k=\infty$, pour obtenir la formule (A).

5. Le calcul qui conduit à cette formule (A) peut être présenté autrement, en s'appuyant toujours sur la valeur de notre intégrale R, mais en partant, non plus de cette intégrale, mais du produit

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right),$$

qu'on peut mettre sous forme d'intégrale multiple, savoir

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})}\alpha^{\frac{\mu}{n}-1}\alpha_1^{\frac{\mu+1}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{\mu+n-1}{n}-1}\,d\alpha\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1}.$$

Substituons en effet, dans cette intégrale, à la variable α une autre variable k ayant les mêmes limites, en posant

$$\alpha=\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}},$$

ce qui donne

$$\alpha^{\frac{\mu}{n}-1}\,d\alpha=\frac{nk^{\mu-1}\,dk}{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})^{\frac{\mu}{n}}};$$

le résultat de la substitution contiendra notre intégrale R; car il peut s'écrire

$$n\int_0^\infty \mathrm{R}\,k^{\mu-1}\,dk.$$

Si donc on admet que

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk},$$

il deviendra

$$n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-nk} k^{\mu-1} dk,$$

c'est-à-dire

$$n^{\frac{1}{2}-\mu} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\mu);$$

d'où résultera de suite la formule (A).

4. La formule

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk},$$

ou, si l'on veut,

$$\mathrm{R} = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) e^{-nk},$$

se démontre, au surplus, bien simplement.

Pour mieux faire comprendre notre méthode, revenons d'abord sur le cas de $n = 2$. Alors

$$\mathrm{R} = \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha;$$

donc

$$\frac{d\mathrm{R}}{dk} = -2k \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Substituons à la variable α une autre variable β en posant

$$\alpha = \frac{k^2}{\beta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{k^2}{\alpha} = \beta \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{d\beta}{\beta}.$$

Les limites pour β seront ∞ et 0, ou bien 0 et ∞ en changeant le signe de $d\beta$. On aura par suite

$$\frac{d\mathrm{R}}{dk} = -2 \int_0^\infty e^{-\left(\beta + \frac{k^2}{\beta}\right)} \beta^{\frac{1}{2}-1} d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dR}{dk} = -2R,$$

et partant

$$R = Ce^{-2k}.$$

La constante C se détermine en posant $k = 0$; elle est égale à $\sqrt{\pi}$. On a donc bien

$$\int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha = \sqrt{\pi}\, e^{-2k}.$$

Soit à présent $n = 3$, ou

$$R = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^3}{\alpha\beta}\right)} \alpha^{\frac{1}{3}-1} \beta^{\frac{2}{3}-1} d\alpha\, d\beta.$$

En différentiant par rapport à k, on a

$$\frac{dR}{dk} = -3k^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^3}{\alpha\beta}\right)} \alpha^{\frac{1}{3}-1} \beta^{\frac{2}{3}-1} d\alpha\, d\beta.$$

Substituons à la variable α une autre variable γ, en posant

$$\alpha = \frac{k^3}{\beta\gamma}, \quad \text{d'où} \quad \frac{k^3}{\alpha\beta} = \gamma, \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{d\gamma}{\gamma}.$$

Les limites pour γ seront encore 0 et ∞, à la condition de changer le signe de $d\gamma$. Il nous viendra donc

$$\frac{dR}{dk} = -3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\beta+\gamma+\frac{k^3}{\beta\gamma}\right)} \beta^{\frac{1}{3}-1} \gamma^{\frac{2}{3}-1} d\beta\, d\gamma.$$

L'intégrale placée au second membre est encore R : seulement α et β sont remplacés par β et γ, ce qui n'importe en rien. Dès lors on a

$$\frac{dR}{dk} = -3R,$$

d'où

$$R = Ce^{-3k}.$$

En posant $k = 0$, on trouve d'ailleurs

$$C = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

on a donc bien

$$\mathrm{R} = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)e^{-3k},$$

comme le donne, pour $n = 3$, notre formule.

Prenant enfin la valeur générale de R, savoir

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\cdots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\cdots d\alpha_{n-1},$$

différentions-la par rapport à k. La valeur de la dérivée sera

$$-nk^{n-1}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\cdots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,\frac{d\alpha_1\,d\alpha_2\cdots d\alpha_{n-1}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}.$$

Substituons à la variable α_1 une autre variable α_n, en posant

$$\alpha_1 = \frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n},$$

et la valeur de $\frac{d\mathrm{R}}{dk}$ se présentera sous cette autre forme

$$-n\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n+\frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}\right)} \alpha_2^{\frac{1}{n}-1}\alpha_3^{\frac{2}{n}-1}\cdots\alpha_n^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_2\,d\alpha_3\cdots d\alpha_n.$$

L'intégrale en facteur est précisément R : seulement les indices de α sont tous ici plus grands d'une unité qu'ils n'étaient d'abord, ce qui est indifférent. On a donc

$$\frac{d\mathrm{R}}{dk} = -n\mathrm{R},$$

d'où

$$\mathrm{R} = \mathrm{C}e^{-nk};$$

en posant $k = 0$, il vient d'ailleurs

$$\mathrm{C} = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

La formule

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}e^{-nk}$$

est donc démontrée.

MÉMOIRE

SUR

LA FLEXION DES PRISMES,

Sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes [*];

PAR M. DE SAINT-VENANT.

1. *Recherches anciennes sur la théorie de la flexion.*

C'est à propos du problème de la rupture des prismes par flexion que la théorie de la résistance des solides a été fondée par Galilée [**], et établie ensuite sur sa véritable base par Mariotte [***], qui l'a rattachée à celle de leur élasticité, dont Robert Hooke avait découvert, un peu avant lui, le principe [****].

[*] Un premier extrait de ce Mémoire a paru dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie*, à la correspondance du 20 novembre 1854, tome XXXIX, page 1027; et un deuxième extrait le jour de sa lecture, 20 juillet 1855, tome XLI, page 143.

[**] *Dialogo secondo, Giornata seconda*; 1638, art. 550, page 63 *delle opere di Galileo Galilei*.

[***] *Traité du mouvement des eaux*, 5e partie, second discours, 1684 (posthume).

[****] *Lectures* De potentiâ restitutivâ *or of Spring*, opuscule inséré aux *Philosophical tracts and collections* de Robert Hooke, et publié en 1678, c'est-à-dire deux ans après sa *Description of Helioscopes*, où il énonce déjà sous l'anagramme *ceiiinosssttuu* son fameux principe *ut tensio sic vis*, énonçant la *proportionnalité* des dilatations ou contractions des ressorts aux efforts qui les amènent ou qu'elles développent.

Galilée, en concevant un prisme horizontal à base rectangulaire partagé en *fibres* ou éléments longitudinaux, supposait qu'elles rompaient ensemble et opposaient toutes la même résistance lorsque, sous l'action d'une force verticale, une portion du prisme se séparait de l'autre en tournant, comme il le pensait, autour du côté inférieur de la section transversale où cette séparation s'opérait.

Mariotte jugeant, au contraire, que les fibres s'étendaient et se comprimaient avant la rupture qui commence par l'une d'elles, et qu'elles résistaient jusque-là en raison du degré de leur extension ou de leur compression supposées proportionnelles aux distances à celles qui ne varient pas de longueur, plaçait celles-ci, et par conséquent l'axe de rotation, au milieu de la hauteur de la section de rupture comme on fait encore aujourd'hui. Mais se trompant ensuite, quant aux conséquences, d'une manière singulière, qui revient à doubler en même temps un bras de levier et une force pour doubler leur produit [*], il trouvait pour le moment des résistances « la même chose que si toutes » les parties s'étendaient » ou que si la rotation se faisait autour du bas de la section et non du milieu ; ce qui lui donnait les deux tiers du résultat de Galilée, tandis qu'il aurait dû n'arriver qu'au tiers, d'après son point de départ.

On s'étonne de voir, vingt ans plus tard, un grand géomètre, auteur de la première théorie des courbes élastiques, Jacques Bernoulli, *tout en admettant aussi les compressions* et présentant même leur considération comme étant de lui, commettre, sous une autre forme, précisément la même méprise du simple au double que Mariotte dans l'évaluation du moment des résistances, ce qui le conduit même à affirmer que la position attribuée à l'axe de rotation est tout à fait indifférente [**].

Ce ne fut qu'en 1773 que Coulomb, dans ce Mémoire célèbre où se trouvent posées presque toutes les bases de la théorie de la stabilité

---

[*] *Idem*, 13e alinéa du discours.

[**] *Véritable hypothèse de la résistance des solides avec la démonstration de la courbure des ressorts*, lemme 4 (*Académie des Sciences*, 1705, ou *Jacobi Bernoullii opera omnia*, tome II, page 976).

des constructions [*], rectifia cette erreur d'évaluation, et que plaçant, comme Mariotte et Bernoulli, la *ligne des fibres invariables* au milieu de la hauteur de la section supposée rectangulaire, il établit sur un lemme évident de statique le principe qui doit servir à la détermination de cette ligne pour les sections de toutes les formes, savoir *la nullité de la somme algébrique totale des résistances longitudinales des fibres* du prisme qui n'est sollicité que transversalement; et il donna une valeur exacte de la somme de leurs moments, valeur moitié moindre que celle à laquelle étaient arrivés Mariotte par une supputation erronée, et Leibnitz par la supposition que les fibres invariables se trouvaient réellement à la partie inférieure de la section [**].

Coulomb remarque très-bien, au reste, que, si la matière du prisme ne suit pas jusqu'à l'instant de sa rupture la loi de proportionnalité des efforts aux dilatations et compressions, l'axe final de rotation pourra se trouver ailleurs qu'au milieu de la section, mais il repousse l'opinion qu'il puisse être au bas, par cette raison péremptoire qu'une ligne sans épaisseur ne saurait supporter à elle seule une pression finie.

C'est dans notre siècle seulement que son Mémoire, qui contient sur ce sujet tant de choses dans les trois pages intitulées *Remarque sur la rupture*, a été enfin étudié et compris. Encore ne l'a-t-il été que peu à peu, car Duleau [***], en donnant la même expression que Coulomb pour la somme des moments des résistances, et en plaçant de la même manière la ligne des fibres invariables pour le prisme à section rectangle, détermine en général la situation de cette ligne par la condition « que la somme des moments des résistances aux compressions » soit égale à la somme des moments des résistances aux extensions », principe faux qui lui assignerait une situation très-différente de la véritable pour les sections qu'elle ne partagerait pas en deux moitiés

---

[*] *Essai sur une application des règles de* maximis *et de* minimis *à quelques problèmes relatifs à l'architecture. Savants étrangers*, année 1773 (tome publié en 1776).

[**] *Demonstrationes novæ de resistentiâ solidorum. Acta Eruditorum Lipsiæ*, 1784, page 319. Leibnitz cite Mariotte dont les recherches étaient déjà connues, mais dont le livre n'était pas publié.

[***] *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé;* 1820, pages 2 et 3.

symétriques. M. Barlow, en Angleterre, faisait la même confusion [*] avouée ingénument et rectifiée par lui dans son dernier ouvrage sur la force des matériaux [**] en citant M. Hodgkinson comme l'ayant signalée [***]. Et son habile et savant compatriote, M. Tredgold, en mettant comme lui et comme Coulomb *l'axe neutre* en question à sa vraie place pour les sections rectangulaires, imaginait un principe singulier [****] pour en déterminer la position dans les sections d'une autre forme, sans comprendre encore le principe si simple invoqué par Coulomb, de l'équilibre nécessaire des forces décomposées dans une même direction parallèle aux fibres.

Mais Navier, après avoir pendant quelque temps placé les fibres invariables avec Galilée, Leibnitz et M. Girard [*****] au bas de la section [******], et s'être livré à diverses considérations compliquées [*******] auxquelles il a dû bientôt renoncer, a donné enfin, dans ses leçons de 1824, imprimées à mesure et publiées en 1826 [********], et conformément au principe de Coulomb, la théorie aujourd'hui adoptée de la résistance des solides, non-seulement à la rupture par flexion, mais encore à la simple flexion sans rupture, dont l'illustre physicien Th. Young avait, en 1807 [*********], présenté les formules pour les cas les plus simples, et qui avait été ensuite le sujet d'une

---

[*] *An Essay on the Strength and Stress of timber*, 1817, art. 120.

[**] *A Treatise on the Strength of timber, cast iron, etc.*, 1837, art. 40.

[***] Tome IV des *Mémoires de Manchester*, nouvelle série.

[****] *Essay on the Strength of cast iron*, art. 85, et *Elementary principles of Carpentry*.

[*****] *Traité analytique de la résistance des solides*, 1798, pages 2, 5 et 7.

[******] *Notes sur la Science des ingénieurs*, de Belidor, 1818; et *Lithographie des premières leçons* (1819-1820) *faites à l'École des Ponts et Chaussées*.

[*******] Notes sur le *Traité de la construction des ponts* de Gauthey, 1819.

[********] *Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*.

[*********] *A Course of lectures on natural Philosophy*, vol. II, sect. IX. Ces formules ont été reproduites par le Dr Robison, article *Strength of materials* de l'*Encyclopedie britannique*.

grande partie des belles expériences de Duleau et de M. Dupin [*].

Navier montra en même temps (ce que Young avait indiqué en passant) le vrai parti qu'on peut tirer des formules de flexion pour prévenir les chances de *rupture éloignée*, en limitant convenablement les dilatations ou les efforts qui alors ne cessent pas d'être soumis à peu près aux lois d'élasticité et de proportionnalité sur lesquelles ces formules se fondent, en sorte qu'il n'est pas nécessaire de placer finalement l'axe de rotation ailleurs que dans la situation où il se trouve pendant les petites flexions.

Nous ne parlons pas ici des autres services rendus à la même branche de la Mécanique par cet homme éminent qui le premier, en 1821 [**] ou dans le temps même de ses incertitudes sur la manière de présenter la théorie approximative de Mariotte et Coulomb, fondait la théorie rigoureuse et complète en donnant les équations générales de l'équilibre et du mouvement intérieur des solides élastiques, sur lesquelles on doit baser désormais toute recherche exacte des changements de forme que leur font subir des forces quelconques, en y ajoutant la théorie des pressions ou tensions intérieures, introduites par M. Cauchy en 1822 [***] et considérées aussi, peu après, par M. Poisson [****] ainsi que par MM. Lamé et Clapeyron qui, alors en mission hors de France, paraissent n'avoir pas eu connaissance des travaux antérieurs lorsqu'ils ont présenté leur beau Mémoire de 1828 [*****], dont une partie est reproduite par M. Lamé dans ses lumineuses leçons sur l'élasticité [******].

---

[*] Expériences sur la force des bois. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 17e cahier, 1815.

[**] Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des solides élastiques, lu le 14 mai 1821. *Mémoires (nouv.) de l'Institut*, tome VII, 1827, et *Société Philomathique*, 1823.

[***] *Société Philomathique*, janvier 1823, page 10; et ensuite, *Exercices de Mathématiques*, tome II, 1827.

[****] Mémoire sur les corps élastiques, lu le 14 avril 1828, et inséré au tome VIII de *l'Institut*.

[*****] Mémoire sur l'équilibre intérieur des solides homogènes. *Savants étrangers*, 1829, et *Journal de Crelle*.

[******] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1853

2. *Théorie, actuellement adoptée, de la flexion due aux dilatations longitudinales inégales des fibres. — Hypothèses sur lesquelles on la fonde ordinairement, et qui ne sont pas, dans ce qu'elles ont d'inexact, nécessaires pour en établir les formules.*

Cette théorie enseignée généralement, et dont les résultats sont assez bien confirmés par l'expérience dans les cas les plus habituels, est ordinairement présentée en partant de ces deux hypothèses : 1° que les sections planes faites avant la flexion perpendiculairement aux arêtes des prismes, restent, après, *encore planes et normales* à ces arêtes et aux *fibres* ou éléments longitudinaux devenus courbes; 2° que ces fibres, les unes allongées, les autres accourcies, *résistent d'une manière indépendante*, comme feraient de petits prismes isolés ou n'exerçant les uns sur les autres aucune action.

Il résulte de la première que les petites portions de fibres comprises entre les deux sections très-voisines et toutes égales avant la flexion, *ont ensuite des longueurs proportionnelles à leurs rayons* ou à leurs distances à la ligne suivant laquelle les plans de ces sections se coupent, en sorte qu'en appelant

ρ la distance, à cette ligne, des fibres *invariables* ou restées de même longueur qu'auparavant, distance nécessairement la même pour toutes;

$\rho + z$ celle d'une fibre quelconque, z pouvant être positif ou négatif;

δ la *dilatation* de cette même fibre, ou la proportion de son extension positive ou négative;

p la force de sa *tension* par unité superficielle de sa petite section transversale;

E le rapport constant, dit coefficient ou module d'élasticité, des tensions aux petites dilatations, pour la matière dont le prisme est composé, *quand il n'y a pas d'action latérale;*

on a, pour le rapport de la nouvelle longueur de la fibre quelconque à son ancienne longueur, la même que la longueur actuelle des fibres qui n'ont pas varié,

$$\frac{\rho + z}{\rho} = 1 + \frac{z}{\rho},$$

ce qui donne pour la dilatation de cette fibre :

(1) $\qquad \delta = \frac{z}{\rho}$; d'où (d'après la deuxième hypothèse) $\quad p = \mathrm{E}\frac{z}{\rho}$.

Ces deux hypothèses, telles que nous venons de les énoncer avec tout le monde, *sont fausses*, excepté dans le cas rare où la flexion s'opère d'une manière *égale* ou en arc de cercle, sous l'action de forces faisant couples à chaque bout; car lorsque, comme à l'ordinaire, les forces extérieures agissant à une extrémité d'un prisme pour le fléchir ont une résultante transversale P qui rend nécessairement la flexion inégale d'un bout à l'autre, l'équilibre d'une portion quelconque du prisme de ce côté exige qu'il se développe à travers la section ω, qui la sépare du reste, des actions intérieures aussi transversales, ayant la même résultante P [*], ce qui ne peut être qu'autant que les sections s'infléchissent et cessent d'être partout normales aux fibres qui, par suite, *glissent* aussi un peu l'une devant l'autre, et exercent mutuellement *une sorte de frottement* ou d'entraînement longitudinal qui exclut l'indépendance absolue.

Mais, malgré ces circonstances, les formules (1) peuvent être justes, 1° si les sections du prisme *se courbent et s'inclinent toutes également* sur les fibres, car les portions de fibres qu'elles interceptent éprouvent les mêmes dilatations que celles qui seraient comprises entre des plans restés normaux; 2° si le rapport $\frac{p}{\delta}$ des tensions aux dilatations des fibres ne dépend nullement de leurs actions *longitudinales* analogues aux frottements, car il suffit alors *qu'elles ne se pressent point normalement à leurs longueurs* pour que ce rapport soit égal à E comme si elles étaient entièrement isolées ou indépendantes.

Or les formules fondamentales (1),

$$\delta = \frac{z}{\rho}, \qquad p = \mathrm{E}\frac{z}{\rho},$$

si l'on peut ainsi les légitimer, conduisent facilement à la détermination des diverses particularités de la flexion, ou du moins de tout ce qui dépend des inégalités des dilatations longitudinales et non des petites

[*] Leur existence n'avait pas échappé à Coulomb (*Mémoire* cité de 1773, art. VII, page 350); et M. Vicat a appelé sur elles l'attention d'une manière particulière en appelant *force transverse* leur résultante (Recherches sur les phénomènes qui précèdent la rupture, etc.; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1833, 2e semestre).

inclinaisons ou *glissements* dont les grandeurs doivent être autrement cherchées : car si l'on nomme

$d\omega$ l'élément de la section ω d'un prisme $A\omega B$, ou la base d'une quelconque de ses fibres, regardée comme un prisme très-délié;

M le moment total, autour de la *ligne des fibres invariables* tracée sur cette même section, des forces extérieures qui font fléchir et qui agissent sur la partie ωB du prisme, *forces qui sont supposées* d'abord *n'avoir aucune somme de composantes dans le sens longitudinal* ou des fibres;

l'équilibre de la partie ωB, sollicitée d'un côté par ces forces extérieures, de l'autre par les tractions $pd\omega$ qu'exerce sur elle, au moyen des fibres, l'autre partie $A\omega$ du prisme, exige, ainsi que l'a remarqué Coulomb, que ces forces longitudinales $pd\omega$ aient une somme nulle comme les forces extérieures décomposées dans leur sens, ou que $\int \frac{E}{\rho} z d\omega = 0$; et il faut aussi que la somme $\int pd\omega . z = \int \frac{E}{\rho} z^2 d\omega$ des moments des mêmes forces autour de la ligne des fibres invariables soit égale à M, d'où ces deux égalités qui sont, avec celles (1), comme le résumé de deux siècles d'efforts et de tâtonnements des savants les plus illustres,

$$(2) \qquad \int z d\omega = 0, \quad \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega = M.$$

La première montre que la ligne des fibres invariables, perpendiculaire au plan de flexion, *passe par le centre de gravité de la section* ω.

La seconde sert à déterminer la courbure $\frac{1}{\rho}$, et, par suite (quand l'effet des glissements dont on vient de parler est négligeable) les formes diverses de l'axe fléchi du prisme, formes qui ont pu déjà être déterminées, quant à la théorie, par Jacques Bernoulli [*], Euler [**] et Lagrange [***] sans connaître encore le vrai dénominateur $E\int z^2 d\omega$, et qui ont été de la part de Navier, et sont, encore aujourd'hui, l'objet

---

[*] *Curvatura laminæ elasticæ. Acta Eruditorum Lipsiæ*, 1694, ou *Opera omnia*, tome I, page 576. Et *Véritable hypothèse, etc.*, cité plus haut.

[**] *Methodus inveniendi lineas, etc. Additamentum de curvis elasticis*, 1744; et divers autres ecrits d'Euler.

[***] *Sur la figure des colonnes*, anciens Mémoires de Turin, I^er^ vol., 1770-1773.

de nombreuses et utiles recherches faites au point de vue des applications pour des modes variés d'agir des forces extérieures, dont les intensités et les directions ne sont données souvent que d'une manière implicite.

La même seconde équation (2) écrite

$$M = \frac{E\int z^2\, d\omega}{z}\,\delta \quad \text{ou} \quad M = \frac{\int z^2\, d\omega}{z}\,p,$$

susceptible, sous cette dernière forme, d'être démontrée sans parler de ρ ni de E, en admettant seulement que la tension p des fibres varie linéairement avec z, est une généralisation de celle de Coulomb relative au seul prisme rectangle, et sert à déterminer le moment M d'après la limite que l'expérience a pu fournir pour les valeurs qui peuvent être données à p sans danger de rupture, même éloignée. Mais il faut observer que l'on n'obtient pas ainsi la vraie condition de résistance, car les glissements ou inclinaisons de fibres ou de sections dont nous avons parlé, et que ces équations n'embrassent pas, amènent de petits écartements moléculaires obliques qui se combinent avec les dilatations longitudinales δ pour produire, dans des sens différents, des dilatations un peu plus grandes, et c'est à ces dilatations résultantes, et non à $\delta = \frac{p}{E}$, qu'il convient d'imposer une limite.

On doit observer aussi, comme a fait M. Persy [*], que la flexion ne peut s'opérer dans le plan du moment principal des forces extérieures qu'autant que ce *plan de sollicitation à fléchir* se trouve parallèle à l'un des deux axes principaux d'inertie de la section ω. Dans tout autre cas, on ne peut pas se servir de l'équation ci-dessus des moments autour d'une ligne perpendiculaire au *plan de flexion* qui n'est point donné ; et nous avons fait voir ailleurs [**] que la question se résout alors en posant *deux* équations des moments, savoir une autour de chacun des deux axes d'inertie de ω.

Mais nous avertissons que, dans tout ce qui suivra, nous ne suppo-

[*] *Cours* (lithographié) *à l'École d'application de Metz*, 4e édit. (1834), art. 42, 43.

[**] *Comptes rendus de l'Académie*, 30 octobre et 6 novembre 1843, tome XVII, pages 946 et 1024. — *Mémoire* (cité plus loin) *sur la torsion*, art. 42. — *Société Philomathique*, 8 juillet 1854, ou journal *l'Institut*, 15 novembre, n° 1089.

serons pas cette dernière circonstance. Nos sections auront toujours un de leurs axes principaux parallèle au plan de sollicitation, qui, ainsi, se confondra constamment avec le plan de flexion.

3. *Objet et sommaire de ce Mémoire.*

Nous nous sommes donc proposé de rechercher, par une analyse rigoureuse, si les deux formules fondamentales (1) de la théorie connue de la flexion, malgré ce que nous avons signalé de faux dans la manière ordinaire de les établir, peuvent être vraies, quand ce ne serait que pour des modes déterminés d'application et de distribution, aux extrémités des prismes, de forces ayant une résultante et un moment donnés quelconques et capables ainsi de produire une flexion quelconque *égale* ou *inégale* d'un bout à l'autre; d'apprécier en même temps les circonstances omises par cette théorie, telles que les glissements relatifs des sections voisines ou des fibres contiguës, ou la courbure que les sections acquièrent; en un mot, de résoudre complétement et exactement le problème de la flexion, tout au moins pour les modes de sollicitation qui donnent des résultats d'une forme simple, servant de limite aux résultats compliqués des autres modes d'application et de distribution des mêmes forces extérieures, en sorte qu'on puisse approximativement les substituer à ceux-ci dans la plupart des cas.

Pour cela, nous démontrons d'abord (art. **4** à **9**) d'une manière élémentaire et géométrique autant que nous pouvons, les formules des pressions dans les solides élastiques, les relations d'égalité qui nous paraissent exister toujours (art. **7**) entre leurs coefficients, les changements de leurs plans (art. **8**), et les équations différentielles tant indéfinies que définies (art. **10, 11**) qui lient les déplacements des points aux forces extérieures.

Comme les difficultés encore insurmontées de leur intégration pour des forces données disparaissent quand ce sont les déplacements qu'on se donne, et se trouvent considérablement amoindries lorsqu'on prend pour données, à la fois, une partie des forces et une partie des déplacements ou de leurs relations mutuelles en recherchant le reste, c'est cette marche mixte, particulièrement propre à la question énoncée, que nous suivons comme nous avons fait ailleurs [*].

---

[*] Principalement à un Mémoire *Sur la torsion des prismes, avec des considérations*

Apres l'avoir appliquée (art. **12**) au cas de l'extension simple, et avoir rappelé (art. **13**) une solution directe, mais simplement approximative du cas de la flexion, proposée par deux illustres géomètres, et qui a servi de point de départ à nos recherches, nous posons (art. **14**) les données de notre problème mixte sur le même sujet, et nous reconnaissons, par une première et facile intégration (art **16**), que sa solution se ramène à celle d'une équation aux différences partielles du second ordre avec une condition définie exprimant qu'aucune pression n'agit longitudinalement sur la surface latérale des prismes.

La deuxième intégration s'effectue en quelque sorte d'elle-même lorsque le contour a certaines formes (art. **18**), en nombre infini, représentées par une équation algébrique quadrinôme dont l'un des termes peut avoir tous les degrés positifs possibles entiers ou fractionnaires. Les déplacements des points du prisme, les dilatations et glissements, la flèche de flexion complétée par la mise en compte de ceux-ci, les composantes de pression intérieure ou extérieure donnant le mode de distribution des forces qui font fléchir, les ordonnées des surfaces légèrement courbes dans lesquelles se sont changées les sections primitivement planes, ont alors (art. **19** à **23**) des expressions aussi algébriques entières et même ne s'élevant pas au delà du troisieme degré; et l'on peut facilement, par une suite de coupes équidistantes, tracer la topographie complète de ces surfaces, dont chacune est commune à une multitude de contours d'un même degré quelconque et au nombre desquels se trouve (si ce degré entier ou frac-

---

sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément, lu le 13 juin 1853, in-4°, 1855; ou *Savants étrangers*, tome XIV.

Nous renvoyons à ce Mémoire pour la manière de faire servir les résultats principaux de celui-ci, ou de combiner les glissements latéraux g, une fois déterminés, avec les dilatations longitudinales $\delta = \delta_0 + \frac{z}{\rho}$, dont la théorie ordinaire tient compte seulement, pour avoir les plus grandes dilatations obliques (le plus souvent exprimées par la formule $\frac{3}{8}\delta + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\delta\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}$, donnée déjà en 1837 dans un cours lithographié, et aux *Comptes rendus*, tome XVII, page 948), et pour en déduire les conditions de résistance à la rupture, dont nous ne nous occuperons pas de nouveau aujourd'hui.

tionnaire reste entre 2 et 4) un cercle ou une ellipse qu'on obtient en annulant le coefficient du terme qui donne à l'équation du contour ce degré au-dessus de 2. Les coupes dont nous parlons se réduisent à des droites parallèles, et, par conséquent, la surface courbe de la section à un cylindre à base de doucine parabolique du troisième degré lorsque (art. **23**) l'équation du contour est du degré 9 traité comme pair $= \frac{18}{2}$: et ce contour courbe, si la dimension perpendiculaire n'excède pas la dimension parallèle au plan de flexion, diffère peu d'un contour rectangulaire à angles arrondis (art. **18**).

Mais lorsque la section est rectangulaire, la dernière intégration peut se faire encore exactement au moyen de séries transcendantes précédées de quelques termes algébriques, après avoir transformé convenablement (art. **24**, **25**) les deux équations dans lesquelles se partage la condition définie. On peut, si l'on se contente d'approximations, effacer ces séries, et l'on peut d'ailleurs calculer des Tables numériques, en conservant ces mêmes séries pour diverses valeurs du rapport des deux dimensions de la base du prisme parallélipipède.

Ces exemples, outre l'intérêt pratique qu'offre l'évaluation de ce que les formules connues de la flexion ne comprennent pas, suffisent pour convaincre, si l'on ne se contentait pas de la seule inspection des équations qu'on ne sait pas toujours intégrer, et d'une comparaison tirée de la théorie de la chaleur (art. **30**) qu'il existe toujours, quelle que soit la forme du contour de la section, des modes de distribution des forces extérieures sur les bases extrêmes, pour lesquelles ces formules admises donnent *exactement* les dilatations et tensions longitudinales et la courbure qui en provient.

En sorte que l'on peut continuer de se servir de ces formules connues quand les prismes sont assez longs par rapport aux dimensions de leurs bases pour que les glissements aient peu d'influence, ainsi que ce qui peut résulter des différences entre le mode effectif d'application et de distribution des forces vers les extrémités et le mode tendant à s'établir, à l'intérieur, aux points qui s'en éloignent; de même que dans les questions où un état varié dépend du temps au lieu de dépendre de la distance, cet état devient de plus en plus indépendant des circonstances initiales et plus approché d'un état permanent (art. **32**).

Enfin nous tâchons de donner (art. **31**) une démonstration directe et sans analyse, et pourtant rigoureuse, des formules de la flexion. Si elle excède un peu en longueur celle que l'on fonde ordinairement sur des hypothèses non justifiées et même inexactes, il faut considérer qu'elle embrasse forcément plusieurs particularités essentielles à enseigner aussi, savoir les contractions latérales qui accompagnent les dilatations longitudinales, et les glissements qui accompagnent les flexions inégales. On peut donc, dans les cours qui ne comportent pas l'exposition analytique de la théorie de l'élasticité, démontrer ces formules, et ce qui doit les compléter, sans déroger aux habitudes mathématiques par un mélange de principes rationnels et de suppositions gratuites dont on ne peut pas même prouver l'approximation.

4. *Démonstration succincte des formules des pressions à l'intérieur des solides élastiques. — Relations entre les pressions en divers sens au même point.*

Nous appelons *pression*, sur un des deux côtés d'une petite face plane imaginée à l'intérieur d'un pareil corps, *la résultante de toutes les actions des molécules situées de ce côté sur les molécules du côté opposé, et dont les directions traversent cette face;* en la regardant comme positive lorsqu'elle est attractive (ou qu'elle constitue, à proprement parler, une *tension* ou une traction).

Il s'ensuit que la résultante des actions exercées sur les molécules d'un élément polyédrique de la part des molécules qui lui sont extérieures, peut être remplacée identiquement par la résultante des pressions sur toutes ses faces; car si les pressions comprennent, en outre, des actions de molécules extérieures sur d'autres molécules extérieures suivant des lignes qui traversent deux des faces, ces actions étrangères se détruisent deux à deux en composant la résultante générale.

Il suit de la même définition que la pression sur une petite face A est résultante des pressions supportées par ses trois projections X, Y, Z sur trois plans rectangulaires passant par son centre. En effet, les nombres et les intensités totales d'actions moléculaires qui s'exercent parallèlement à une même ligne droite quelconque l à travers diverses faces très-petites ayant le même centre, est évidemment proportionnelle

aux superficies des projections de ces faces sur un même plan P perpendiculaire à la droite l : or la projection de A sur tout plan P a une superficie égale à la somme des superficies des projections de X, Y, Z sur le même plan ; donc, comme les pressions résultent de la composition des actions qui s'exercent ainsi dans toutes les directions, celle sur S est la même chose que celles sur X, Y, Z composées ensemble.

Ce théorème de M. Cauchy est dit des *projections de plans de pression*.

Il suit encore de la même définition et de la même remarque que si l'on appelle

$$p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}; \quad p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}; \quad p_{zx}, p_{zy}, p_{zz};$$

les composantes, suivant les x, y, z, des pressions supportées en un même point par l'unité superficielle de trois petits plans perpendiculaires à ces coordonnées rectangles, et ayant le même centre de gravité, la première sous-lettre indiquant le plan par sa normale, et la seconde le sens de décomposition, l'on a :

$$3) \qquad p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}.$$

En effet, les nombres et les intensités totales d'actions moléculaires s'exerçant parallelement à une même droite quelconque l à travers deux petites faces, *supposées égales en superficie*, et perpendiculaires respectivement à y et à z, sont comme leurs projections sur un même plan perpendiculaire à l, c'est-à-dire comme $\cos(l, y)$ et $\cos(l, z)$. Ces mêmes intensités totales d'actions étant décomposées, la première dans le sens z, la seconde dans le sens y, donneront $\cos(l, y)\cos(l, z)$ et $\cos(l, z)\cos(l, y)$, ou la même chose. Donc comme les pressions résultent de la composition des actions semblables pour toutes les directions l, on voit que la pression sur la première petite face, décomposée perpendiculairement à la seconde, a la même intensité que la pression sur la seconde, décomposée perpendiculairement à la première, ce qui donne bien $p_{yz} = p_{zy}$, et ainsi de même des quatre autres composantes analogues.

C'est le théorème de *réciprocité des composantes tangentielles*, également dû à M. Cauchy.

3. *Suite. — Dilatations, glissements : forme linéaire des expressions des composantes de pression.*

Quant aux relations que les composantes *normales* p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, et les composantes *tangentielles* p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} des pressions développées dans un corps élastique, par les déplacements relatifs de ses points, peuvent avoir avec ces déplacements, imaginons par un même point m de ce corps trois petites lignes matérielles mx, my, mz, primitivement parallèles aux coordonnées rectangulaires, et changées par les déplacements en trois lignes légèrement obliques entre elles m_1x_1, m_1y_1, m_1z_1. Appelons

$$\delta_x, \quad \delta_y, \quad \delta_z,$$

les *dilatations* éprouvées par ces petites lignes, ou les proportions supposées très-petites de leurs allongements positifs ou négatifs, et désignons par

$$g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy},$$

les petites inclinaisons qu'elles ont prises les unes sur les autres, ou les rétrécissements éprouvés par leurs trois angles, et qui ne sont autre chose que les cosinus des angles actuels $y_1m_1z_1$, $z_1m_1x_1$, $x_1m_1y_1$, supposés devenus légèrement aigus lorsque l'on prend positivement les quantités g; quantités que nous appellerons *glissements*, parce que celle g_{yz}, par exemple, mesure de combien auront glissé l'une devant l'autre les lignes matérielles parallèles soit aux y, soit aux z, situées à l'unité de distance dans des plans parallèles à celui yz.

Il est clair que ces trois dilatations et ces trois glissements, supposés connus, et sensiblement les mêmes dans toute une petite étendue autour du point m, donnent tout ce qu'il faut pour déterminer les changements de distance et de situation relative des points environnants, (comme on le verra bien d'ailleurs par les expressions (6) ci-apres). Par conséquent, les composantes p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} des pressions, *si*, comme on le suppose, *elles étaient nulles avant ces changements*, sont *fonctions de* $\delta_x, \delta_y, \delta_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$.

Dans ces fonctions, les six quantités *très-petites* δ, g doivent entrer toutes avec les mêmes exposants, car elles peuvent décroître indéfiniment à la fois, sans cesser d'avoir le même ordre de grandeur et d'in-

fluence sur les déplacements relatifs et sur les pressions. Et comme il y a d'assez nombreuses expériences où, quelques-unes étant nulles, les pressions ont été trouvées simplement proportionnelles aux autres (*ut extensio sic vis*), *toutes ces fonctions doivent être linéaires*.

6. *Suite. — Attractions et répulsions, fonctions des distances moléculaires. Théorème de composition géométrique correspondante des forces et des petits déplacements.*

Cette forme linéaire des composantes de pressions se prouve également si, au lieu d'invoquer des expériences particulières dont l'interprétation peut donner lieu à discussion, l'on part d'un principe général que l'expérience aussi a révélé, et sur lequel nos définitions mêmes sont basées, savoir : « que les points matériels exercent les uns sur les autres, à des distances insensibles, des actions attractives et répulsives, qui sont fonctions continues de ces distances. » Et l'on peut, en s'en servant, trouver en même temps les relations qui peuvent exister entre quelques-uns des trente-six coefficients des formules exprimant les six composantes p en fonction des ϑ et des g.

En effet, on déduit d'abord du principe énoncé, ce théorème souvent applicable : *Que la pression due à de petits déplacements résultants de plusieurs autres est elle-même résultante des pressions qui seraient dues séparément aux déplacements composants.* Car si, par une translation et une rotation générales, ne changeant rien aux déplacements *relatifs* qui seuls produisent les actions moléculaires et les pressions, on ramène la petite portion de corps considérée à avoir ses points très-proches de leurs premières situations, et leurs lignes de jonction actuelles à prendre des directions extrêmement peu différentes de celles des anciennes, on verra facilement, en projetant celles-ci sur celles-là, que les petits changements de longueur de ces lignes, dus aux déplacements totaux ou résultants, sont sommes algébriques des changements dus aux déplacements partiels ou composants. Or les actions moléculaires développées sont proportionnelles à ces changements, en vertu de la *continuité* supposée des fonctions qui en mesurent l'intensité. Donc les pressions, résultantes des actions moléculaires dues aux déplacemens totaux, sont aussi résultantes des pressions

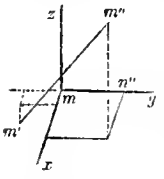
qui seraient produites par les actions dues aux déplacements partiels[*].

Réciproquement, comme les pressions intérieures font équilibre aux forces extérieures, les petits déplacements produits par plusieurs de celles-ci sont résultants géométriques de ceux dus à chacune.

Or il en résulte bien qu'en imprimant aux points des déplacements équivalant à deux, à trois,..., autres déplacements qui donnaient, chacun, la même grandeur aux ∂_x, et zéro pour les ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, on aura pour p_{xx}, pour p_{yy}, etc., deux fois, trois fois,..., ce qui était produit par les déplacements partiels; et que, par conséquent, ces six composantes varient linéairement avec ∂_x. Et, comme on en peut dire autant de chacun des autres ∂ ou g, supposés successivement exister seuls, on voit que les composantes de pression qui ont lieu lorsqu'ils existent tous, sont fonctions linéaires de ces dilatations et glissements.

7. *Suite. — Nombre des coefficients essentiellement différents. Leur réduction de trente-six à quinze.*

Pour connaître les grandeurs relatives des trente-six coefficients qui multiplient ces six quantités ∂ et g dans les expressions des six composantes p, considérons d'abord un cas simple où ∂_x, ∂_z, g_{yz}, g_{zx} soient nuls et ∂_y, g_{xy} constants, en sorte que, par tout le corps, les plans matériels perpendiculaires aux y se soient écartés les uns des autres dans une même proportion ∂_y de leurs distances primitives et aient en même temps tourné tous d'un petit angle constant g_{xy} autour



de lignes parallèles aux z, suivant lesquelles ils coupent un même plan ymz perpendiculaire aux x. La ligne de jonction r de deux molécules quelconques m', m'', qui est supposée avoir, avant les déplacements, des projections x, y, z parallèlement aux coordonnées de même nom, aura, après les déplacements, les mêmes projections x, z; mais sa projection y sur les y sera augmentée de $y\partial_y$ à cause des écartements proportionnels ∂_y, et de $x g_{xy}$ à cause des rotations g_{xy}, ce

[*] Ce théorème, ainsi démontré, se trouve à des feuilles lithographiées d'un cours de Mécanique fait en 1837-1838 à l'École des Ponts et Chaussées, art. 12, et il en a été donné de nombreuses applications aux art. 71 à 81 des mêmes feuilles.

qui donnera, en projetant sur la ligne r, une augmentation $(y\partial_y + x g_{xy})\frac{y}{r}$ de cette distance $m'm''$ des deux molécules. Il en résultera, R étant une fonction de r, une action mutuelle $R(y\partial_y + x g_{xy})\frac{y}{r}$ développée entre ces deux mêmes molécules m', m'' par les déplacements. Si ces molécules sont du nombre de celles situées de part et d'autre d'une face plane perpendiculaire aux x et ayant une superficie A très-petite, on aura les composantes $A p_{xx}$, $A p_{xy}$ de la pression qui s'exerce à travers cette petite face en prenant les sommes $\sum$ de toutes ces actions décomposées successivement dans les sens x et y, ou multipliées par les cosinus des angles de r avec les x et y, cosinus égaux à $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ à cela près de quantités qui ne donneraient que des produits très-petits du second ordre et négligeables.

Il en résulte

$$p_{xx} = \frac{\partial_y}{A}\sum\frac{R}{r^2}xy^2 + \frac{g_{xy}}{A}\sum\frac{R}{r^2}x^2y, \quad p_{xy} = \frac{\partial_y}{A}\sum\frac{R}{r^2}y^3 + \frac{g_{xy}}{A}\sum\frac{R}{r^2}xy^2.$$

D'où l'on voit que le coefficient de ∂_y dans p_{xx} est égal au coefficient de g_{xy} dans p_{xy}.

La même égalité aura lieu si ∂_x, ∂_z, g_{yz}, g_{zx} ne sont pas nuls, en vertu du principe (article précédent) de composition des pressions dues à divers déplacements composants. Elle aura lieu encore si ∂_y et g_{xy}, au lieu d'être constants par tout le corps solide, sont variables; car on suppose toujours qu'ils varient fort peu dans l'étendue des petites portions de ce corps où s'exercent, à des distances insensibles, les actions qui composent les pressions.

On en déduira, en changeant simplement les lettres ou les directions, que le coefficient de g_{xy} dans p_{yx} sera le même que celui de ∂_x dans p_{yy}, et que, par conséquent, celui-ci est le même que le coefficient de ∂_y dans p_{xx}, puisque, comme nous savons, p_{yx} est la même chose que p_{xy} et doit avoir les mêmes coefficients.

On reconnaîtra d'autres égalités en variant les sens et en invoquant encore le principe $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{xy} = p_{yx}$.

D'où l'on peut conclure que si l'on désigne les divers coefficients par une même lettre a avec les deux sous-lettres de la composante de pres-

sion à laquelle ils appartiennent, suivies des sous-lettres de la dilatation ou du glissement qu'ils affectent, en doublant, pour la symétrie, celles des dilatations, ou si l'on écrit

$$(4)\quad \begin{cases} p_{xx} = a_{xx.xx}\partial_x + a_{xx.yy}\partial_y + a_{xx.zz}\partial_z + a_{xx.yz}g_{yx} + a_{xx.zx}g_{zx} + a_{xx.xy}g_{xy} \\ p_{yy} = a_{yy.xx}\partial_x + \ldots, \; p_{zz}, \; p_{yz}, \; p_{zx}, \; p_{xy} = \text{des expressions analogues}, \end{cases}$$

les coefficients ayant les mêmes quatre sous-lettres seront égaux, quel que soit l'ordre où elles s'y trouvent placées, ce qui réduit les trente-six coefficients de ces formules à *quinze* distincts [*].

Si dans cette démonstration nous avons négligé l'influence des actions moléculaires primitives, en n'attribuant les pressions qu'aux actions nouvelles, développées par les déplacements, c'est pour simplifier et parce qu'il est facile de voir que ces actions anciennes disparaissent quand on suppose les pressions primitives nulles.

Ce qui précède suppose, au reste, que les déplacements varient, d'une molécule à l'autre, d'une manière simple et continue, ou que, s'il en est autrement, à cause de la grande diversité et de la complication des arrangements des molécules et de leurs actions en divers sens, on puisse remplacer les déplacements individuels des molécules par les déplacements moyens de leurs groupes, qui doivent varier d'une manière plus régulière ou moins compliquée vu la compensation des écarts en divers sens. La possibilité de cette substitution

[*] C'est à M. Cauchy que l'on doit ce théorème, comme la plus grande partie de la théorie des pressions. Il l'a donné en faisant quelques suppositions et substitutions dont la démonstration élémentaire que nous venons d'en donner se trouve dégagée.

Si, aux pages 222 du tome III et surtout 138 du tome IV de ses *Exercices* (1828 et 1829), il semble qu'il y a vingt et un coefficients au lieu de quinze, c'est que M. Cauchy suppose, à ces deux endroits, qu'il existait déjà dans l'état primitif des pressions dont les six composantes sont précisément les six coefficients supplémentaires.

Les termes de $p_{xx}, p_{yy}, \ldots$, où entrent ces pressions *primitives* ou antérieures aux déplacements qui ont produit les dilatations ∂ et les glissements g, s'obtiennent facilement en se servant d'un théorème qui se trouve démontré d'une manière élémentaire à une *Note sur les pressions*, insérée à la date du 7 juillet 1845 aux *Comptes rendus*, tome XXI, page 24. Ils sont habituellement négligeables dans les questions relatives aux corps solides, mais il faut en tenir compte dans la théorie de la lumière et dans celle du son, vu que les forces déjà en jeu dans l'état d'équilibre des fluides élastiques qu'on y considère peuvent avoir une influence comparable ou même supérieure à celle des forces que l'ébranlement seul développerait dans le cas de nullité de celles-là.

est accordée généralement et ne paraît pas douteuse pour les corps à cristallisation confuse, *les seuls dont on se serve comme matériaux ;* mais elle est, jusqu'à un certain point, contestable, comme l'a remarqué M. Cauchy, pour des corps régulièrement cristallisés dont les petits assemblages atomiques, tous semblables, tourneraient semblablement sur eux-mêmes lorsqu'on déforme l'ensemble de manière à amener certaines concordances de périodicité qui s'opposeraient à l'exacte compensation des écarts en plus et en moins. Bien que nous ne pensions pas que cette circonstance, si elle a lieu, doive avoir une influence sensible, et quoiqu'elle ne puisse regarder que des corps dont nous n'aurons pas à nous occuper dans ce Mémoire, comme les doutes dont le principe de l'égalité du coefficient de g_{xy} dans p_{xy} à celui de ϑ_y dans p_{xx} a été l'objet ne sont pas encore levés pour tout le monde, nous conserverons le plus souvent l'indépendance aux trente-six coefficients, ce qui, comme l'a remarqué M. Lamé, ne rend pas ordinairement plus compliquées les solutions analytiques des problèmes.

8. *Suite. — Changement des axes et des plans pour lesquels on prend les pressions, les dilatations et les glissements.*

On a fait voir (art. 4) qu'une petite face A, perpendiculaire à une droite quelconque r, supporte une pression résultante de celles qui s'exercent à travers ses projections $A\cos\widehat{rx}$, $A\cos\widehat{ry}$, $A\cos\widehat{rz}$ sur trois plans perpendiculaires aux coordonnées x, y, z. La pression sur la première projection, par exemple, a pour composantes $A\cos\widehat{rx}.p_{xx}$, $A\cos\widehat{rx}.p_{xy}$, $A\cos\widehat{rx}.p_{xz}$ suivant les mêmes coordonnées. En écrivant de même les composantes des autres, et en les ajoutant toutes après les avoir décomposées suivant une même autre droite r', on obtient, en divisant par A, la valeur suivante de la composante $p_{rr'}$, suivant r', de la pression à travers l'unité superficielle de la face perpendiculaire à r :

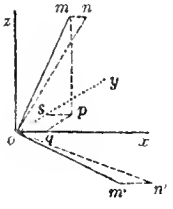
$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned} p_{rr'} = {} & \left(p_{xx}\cos\widehat{rx} + p_{yx}\cos\widehat{ry} + p_{zx}\cos\widehat{rz}\right)\cos\widehat{r'x} \\ & + \left(p_{xy}\cos\widehat{rx} + p_{yy}\cos\widehat{ry} + p_{zy}\cos\widehat{rz}\right)\cos\widehat{r'y} \\ & + \left(p_{xz}\cos\widehat{rx} + p_{yz}\cos\widehat{ry} + p_{zz}\cos\widehat{rz}\right)\cos\widehat{r'z}. \end{aligned}\right.
$$

Si l'on attribue successivement à r et r' les directions de trois nouvelles lignes rectangulaires x', y', z', on a les formules servant à passer d'un système à un autre système de plans de pression.

Quant aux dilatations et glissements, supposons d'abord que les déplacements des points d'un corps solide ne lui fassent éprouver qu'une dilatation générale δ_x. Si la première extrémité o d'une droite $om = r$, est restée immobile, comme sa projection oq dans le sens x est $r\cos\widehat{rx}$, la deuxième extrémité m aura cheminé de $r\cos\widehat{rx}.\delta_x$ parallèlement à x, ce qui, en projetant le chemin mn sur la direction de r, ou en multipliant par $\cos\widehat{rx}$, donne $r\delta_x\cos^2\widehat{rx}$ pour son allongement, et, par conséquent, en divisant par r, pour sa dilatation,

$$\delta_r = \delta_x \cos^2 \widehat{rx}.$$

Si, en second lieu, le corps a éprouvé partout un glissement g_{yz} au lieu d'une dilatation, en sorte que tous les plans matériels tels que mps, parallèles aux zx, aient tourné d'un angle très-petit g_{yz} autour de leurs intersections ps avec celui xoy perpendiculaire aux z, comme la distance mp de m à ce plan fixe est $r\cos\widehat{rz}$, m aura



cheminé de $r\cos\widehat{rz}.g_{yz}$ parallèlement aux y, en sorte que, en projetant sur la direction om de r, et divisant par sa longueur, on a pour la dilatation δ_r que le glissement g_{yz} aura fait éprouver à cette ligne :

$$\delta_r = g_{yz}\cos\widehat{ry}.\cos\widehat{rz}.$$

Soit maintenant une deuxième ligne $r' = om'$ primitivement à angle droit sur celle $r = lm$, et prenons pour plus de simplicité les longueurs $r = r' = 1$. La dilatation générale δ_x supposée tout à l'heure aura fait cheminer parallèlement aux x leurs extrémités m, m' de deux petites lignes $mn = \cos\widehat{rx}.\delta_x$ et $m'n' = \cos\widehat{r'x}.\delta_x$ parallèles à x. Si l'on projette la première nn sur la direction de om' ou r', on aura la petite quantité dont l'angle droit mom' se serait rétréci s'il était devenu nom' ;

et si l'on projette la deuxième $m'n'$ sur la direction de r ou de om, direction qui est sensiblement la même que celle de on, on aura la petite quantité dont l'angle presque droit nom' se serait rétréci en devenant non'. La somme de ces deux projections sera le rétrécissement éprouvé par l'angle droit mom' en devenant non', ou (art. 5) le glissement $g_{rr'}$. Donc on a pour ce glissement produit par la dilatation δ_x :

$$g_{rr'} = 2\,\delta_x \cos\widehat{rx}\cos\widehat{r'x}.$$

Si, au lieu d'une dilatation δ_x, il n'y a eu qu'un glissement g_{yz} par tout le corps, les deux extrémités m, m' des lignes $r=1$, $r'=1$ auront cheminé de $g_{yz}\cos\widehat{rz}$ et $g_{yz}\cos\widehat{r'z}$ parallèlement aux y. En ajoutant, comme tout à l'heure, les projections de la première de ces petites lignes sur r' et de la seconde sur r, on a pour le glissement $g_{rr'}$ provenant de celui g_{yz},

$$g_{rr'} = g_{yz}\,(\cos\widehat{rz}\cos\widehat{r'y} + \cos\widehat{ry}\cos\widehat{r'z}).$$

S'il y a eu même temps des dilatations et des glissements δ_x, δ_y, δ_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} dans les sens des coordonnées x, y, z, la dilatation δ_r et le glissement $g_{rr'}$ seront, à cela près de quantités très-petites du second ordre et négligeables, sommes de tout ce qui est dû à ces diverses modifications séparément. Donc on a

$$(6)\quad \begin{cases} \delta_r = \delta_x\cos^2\widehat{rx} + \delta_y\cos^2\widehat{ry} + \delta_z\cos^2\widehat{rz} + g_{yz}\cos\widehat{ry}\cos\widehat{rz} + g_{zx}\cos\widehat{rz}\cos\widehat{rx} + g_{xy}\cos\widehat{rx}\cos\widehat{ry}, \\ g_{rr'} = 2\,\delta_x\cos\widehat{rx}\cos\widehat{r'x} + 2\,\delta_y\cos\widehat{ry}\cos\widehat{r'y} + 2\,\delta_z\cos\widehat{rz}\cos\widehat{r'z} \\ \quad + g_{yz}(\cos\widehat{ry}\cos\widehat{r'z} + \cos\widehat{rz}\cos\widehat{r'y}) + g_{zx}(\cos\widehat{rz}\cos\widehat{r'x} + \cos\widehat{rx}\cos\widehat{r'z}) + g_{xy}(\cos\widehat{rx}\cos\widehat{r'y} + \cos\widehat{ry}\cos\widehat{r'x}); \end{cases}$$

double formule qui, en donnant successivement aux droites r, r', la direction des trois nouvelles lignes rectangulaires x', y', z', servira à changer à volonté le système des axes coordonnés suivant lesquels on prend les dilatations et les glissements [*].

---

[*] On trouve au Mémoire cité *Sur la torsion*, art. 6, ces deux formules (6) démontrées pour tous leurs termes à la fois, d'une manière qui peut paraître plus prompte, mais qui fait moins comprendre la raison de leur composition.

9. *Réduction des formules de composante de pression pour diverses sortes de contextures des corps.*

Si le corps est *homogène*, les coefficients a des formules (4) sont les mêmes en tous ses points, pour les mêmes directions des axes coordonnés, mais peuvent changer avec ces directions des axes.

Et si, de part et d'autre d'un plan que l'on peut appeler *plan de symétrie de contexture*, ou, avec M. Cauchy, *plan principal d'élasticité* [*], les pressions ont les mêmes relations avec les déplacements ou sont exprimables en ∂_x, ∂_y, ..., g_{xy}, avec les mêmes coefficients, les formules (4) doivent rester les mêmes lorsque, ce plan étant pris pour plan des yz, on change l'axe des x en son prolongement du côté opposé. Or alors, les axes y et z restant les mêmes, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, ∂_y, ∂_z, g_{yz} ne changent pas, et il est facile de voir qu'il en est de même de p_{xx} et ∂_x, tandis que p_{zx}, p_{xy}, g_{zx}, g_{xy} prennent un signe contraire en conservant la même grandeur. Pour que les équations (4) restent les mêmes en opérant de pareils changements de signe, il faut que g_{zx}, g_{xy} n'entrent pas dans celles qui donnent p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, et que ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} n'entrent pas dans celles qui donnent p_{xz}, p_{xy}. D'où il suit que lorsqu'il y a, en chaque point d'un corps homogène, un plan de symétrie perpendiculaire aux x, on a des expressions de la forme suivante. On a désigné par les mêmes lettres les coefficients qui doivent être faits égaux, d'après le principe de la réductibilité, à quinze, des trente-six coefficients de (4), en sorte que les accents seront effacés si l'on ne met pas ce principe en doute :

$$(7)\qquad \begin{cases} p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z + h g_{yz}, \\ p_{yy} = f''\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z + k g_{yz}, \\ p_{zz} = e'\partial_x + d''\partial_y + c\partial_z + l g_{yz}, \\ p_{yz} = h'\partial_x + k'\partial_y + l'\partial_z + d g_{yz}, \\ p_{zx} = e g_{zx} + h'' g_{xy}, \\ p_{xy} = h''' g_{zx} + f g_{xy}. \end{cases}$$

Si, en outre, il y a un plan de symétrie perpendiculaire aux y, ces

[*] *Comptes rendus*, tome XXXVIII, page 329.

équations devront rester les mêmes en changeant pareillement les signes de p_{yz}, g_{yz}, p_{xy} et g_{xy}, ce qui les réduira à la forme suivante, qui prouve que le plan perpendiculaire aux z sera aussi, par cela seul, un plan de symétrie ou un plan principal d'élasticité, *en sorte qu'il y aura trois plans principaux* se coupant parallèlement aux x, y, z :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z,\\ p_{yy} &= f''\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z,\\ p_{zz} &= e'\partial_x + d''\partial_y + c\partial_z, \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} p_{yz} &= d\,g_{yz},\\ p_{zx} &= e\,g_{zx},\\ p_{xy} &= f\,g_{xy}. \end{aligned}\right.$$

Si, de plus, tout est égal autour d'une parallèle mx aux x, appelée alors un *axe d'élasticité*, on a

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\text{non-seulement} \quad b = c, \quad f = e, \quad f' = e'', \quad d'' = d',\\ &\text{mais encore} \qquad\qquad b = 2d + d'. \end{aligned}\right.$$

On prouve cette dernière relation $b = 2d + d'$, en prenant, sans changer l'axe des x, deux nouveaux axes y', z' faisant, dans le plan yz, un angle θ avec les anciens y et z, et en exprimant qu'on a encore $p_{y'z'} = d\,g_{y'z'}$. En effet, si nous supposons, pour simplifier, que le point m où ces axes se croisent est resté immobile et que les déplacements des autres points n'ont fait que produire une dilatation générale ∂_z, d'où

$$p_{yy} = d'\partial_z, \quad p_{zz} = b\partial_z, \quad p_{yz} = 0,$$

il en résultera, en considérant les pressions supportées par une petite face A perpendiculaire à y' et par ses deux projections $A\cos\theta$ et $A\sin\theta$ sur les plans perpendiculaires aux y et aux z, et en égalant la première à la somme des deux autres après les avoir décomposées toutes les trois suivant z' (ou bien en particularisant la formule générale de transformation (5) de l'art. 8 pour $p_{yz} = 0$, $\cos\widehat{rx} = \cos\widehat{r'x} = 0$, $\cos\widehat{ry} = \cos\widehat{r'z} = \cos\theta$, $\cos\widehat{rz} = -\cos\widehat{r'y} = \sin\theta$),

$$p_{y'z'} = (p_{zz} - p_{yy})\sin\theta\cos\theta = (b - d')\partial_z\sin\theta\cos\theta).$$

Il en résulte aussi, en raisonnant comme on a fait art. 8 pour trouver $g_{rr'} = 2\partial_x\cos\widehat{rx}\cos\widehat{r'x}$, ou en particularisant la formule gé-

nérale (6),

$$g_{y'z'} = 2\,\partial_z \sin\theta \cos\theta.$$

D'où la nécessité, pour obtenir $p_{y'z'} = \mathrm{d}\,g_{y'z'}$, d'avoir

$$\mathrm{b} - \mathrm{d}' = 2\,\mathrm{d},$$

ou précisément la dernière des relations (9).

D'où il suit qu'on a, lorsque x est axe d'élasticité,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{xx} = \mathrm{a}\,\partial_x + \mathrm{e}''\partial_y + \mathrm{e}''\partial_z, \\ p_{yy} = \mathrm{e}'\partial_x + (2\,\mathrm{d} + \mathrm{d}')\partial_y + \mathrm{d}'\partial_z, \\ p_{zz} = \mathrm{e}'\partial_x + \mathrm{d}'\partial_y + (2\,\mathrm{d} + \mathrm{d}')\partial_z, \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} p_{yz} = \mathrm{d}\,g_{yz}, \\ p_{zx} = \mathrm{e}\,g_{zx}, \\ p_{xy} = \mathrm{e}\,g_{xy}. \end{array}\right.$$

Les relations *nécessaires* (9) que nous venons d'établir ainsi entre les coefficients, sont *suffisantes* pour que tout soit pareil autour de l'axe des x. En effet, cette parité ne saurait empêcher le coefficient d de g_{yz} dans p_{yz} de pouvoir être différent de ceux e des glissements g_{zx}, g_{xy} dans p_{zx}, p_{xy}, ni le coefficient d' de ∂_z dans p_{yy} de pouvoir être différent de ceux e', e'' de ∂_x dans p_{yy} et de ∂_z dans p_{xx}, en sorte qu'elle ne peut exiger aucune autre égalité entre les coefficients désignés par des lettres différentes.

Aussi l'on peut vérifier, en appliquant les formules générales de transformation (5) $p_{rr'} = \ldots$, et (6) $\partial_r = \ldots$, $g_{rr'} = \ldots$, de l'art. **8**, que les diverses composantes p_{xx}, $p_{y'y'}$, $p_{y'z'}$, $p_{z'x}$ sont exprimées en ∂_x, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}\ldots$, avec les mêmes coefficients que celles p_{xx}, p_{yy}, p_{yz}, p_{zx} le sont en ∂_x, ∂_y, ∂_z, $g_{yz}\ldots$, ce qui est bien le caractère de l'égale *élasticité* dans toutes les directions faisant le même angle avec les x.

S'il y a aussi un axe d'élasticité parallèle aux y, il faut, par les mêmes raisons, qu'on ait

$$(11)\qquad \mathrm{d} = \mathrm{e},\quad \mathrm{d}' = \mathrm{e}'' = \mathrm{e}',\quad \mathrm{a} = 2\,\mathrm{d} + \mathrm{d}' = 2\,\mathrm{e} + \mathrm{e}',$$

d'où résulte qu'il y a un troisième axe d'élasticité parallèle aux z, et même, à cause de l'égalité des coefficients quand on prend deux nouveaux axes y', z', que ceux-ci, et, par suite, des droites quelconques menées dans les plans xy', xz', c'est-à-dire *toutes les droites possibles*

tirées par le point m, sont aussi des axes d'élasticité. Le corps est alors appelé *isotrope* ou d'égale élasticité en tout sens.

Les coefficients se réduisent à deux, e et e', et même à un seul si (art. 7) l'on ne conteste point l'égalité $e = e'$ du coefficient de δ_y dans p_{xx} au coefficient de g_{xy} dans p_{xy}.

Mais les expériences de Savart, et la simple considération de la manière dont s'opèrent le refroidissement et la solidification des corps, prouvent que l'isotropie est fort rare, même, comme le pense M. Regnault, dans les métaux coulés ou les matières vitreuses ou grenues; en sorte qu'il convient de supposer, en général, une contexture inégale en divers sens, et que le désaccord qui peut être trouvé entre des résultats d'expériences et les formules d'isotropie avec $e = e'$, ne prouve nullement contre le principe (art. 7) $a_{xx,yy} = a_{xy,xy} = a_{yy,xx}$, etc., pour les corps à contexture soit égale, soit inégale.

10. *Équations différentielles indéfinies de l'équilibre des solides élastiques. — Expression des dilatations et glissements en fonction des déplacements amenés à être très-petits.*

Les conditions de l'équilibre intérieur du corps s'expriment en posant simplement les trois équations de *non-translation* de chaque élément solide, dont le point quelconque $m(x, y, z)$ occupe le centre, en remplaçant par les pressions sur ses faces (art. 4) les actions émanant des éléments qui l'environnent. Soient, parallèlement aux coordonnées x, y, z,

x, y, z les trois dimensions très-petites de cet élément supposé parallélipipède rectangle,

X, Y, Z les composantes, par unité de volume, des autres forces, telles que la pesanteur, pouvant agir sur sa matière.

Les deux faces xy de cet élément, perpendiculaires aux z, éprouvent des pressions contraires qui, décomposées dans le sens x par exemple, sont l'une un peu au-dessus, l'autre un peu au-dessous de la pression supportée par une face parallèle passant par le centre m, et qui est représentée par p_{zx} par unité superficielle. La différence sera le coefficient différentiel $\frac{dp_{zx}}{dz}$ multiplié par la distance z de ces faces, et aussi

par leur superficie xy; la résultante des deux composantes de pression, suivant x, sera ainsi

$$\frac{dp_{xx}}{dz}\,xyz.$$

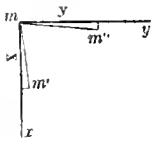
Comme on peut faire le même raisonnement pour les différences des pressions, décomposées dans le même sens x, qui ont lieu sur les quatre autres faces de l'élément prises deux à deux, on a pour l'équilibre de l'élément sollicité en sens opposé par la force Xxyz, une équation dont on peut diviser tous les termes par son volume xyz. Il en résulte la première des trois équations suivantes; les deux autres s'obtiennent de même, en exprimant l'équilibre de translation dans les sens y et z :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx}+\dfrac{dp_{yx}}{dy}+\dfrac{dp_{zx}}{dz}=\mathrm{X}, \quad \dfrac{dp_{xy}}{dx}+\dfrac{dp_{yy}}{dy}+\dfrac{dp_{zy}}{dz}=\mathrm{Y}, \\ \dfrac{dp_{xz}}{dx}+\dfrac{dp_{yz}}{dy}+\dfrac{dp_{zz}}{dz}=\mathrm{Z}. \end{cases}$$

Toutes les formules ci-dessus s'appliquent à des grandeurs quelconques des déplacements *absolus*, et même des déplacements *relatifs* de ceux des points d'un même corps qui sont éloignés les uns des autres, *pourvu que les déplacements relatifs des points très-proches restent fort petits*, ou que les petites distances ne varient que dans de très-faibles proportions.

Pour en tirer les déplacements par le calcul, il faut exprimer, en fonction de ceux-ci, les dilatations et les glissements. Mais, pour que le calcul soit simple, il faut, en général, ne considérer à la fois que des portions de corps d'une petite étendue, et où l'on puisse, par conséquent, au moyen d'une translation et d'une rotation générales, *amener les déplacements à être très-petits*. Soient alors

$x+u$, $y+v$, $z+w$ les coordonnées, après les déplacements, du point quelconque m, dont x, y, z étaient les coordonnées primitives, ou u, v, w *ses petits déplacements dans les sens* x, y, z.



Si m', m'' sont deux autres points, dont les coordonnées primitives étaient respectivement $x+\mathrm{x}$, y, z et x, $y+\mathrm{y}$, z, ou si $mm'=\mathrm{x}$, $mm''=\mathrm{y}$ sont deux petites droites primitivement parallèles à x et à y, comme on

aura pour les coordonnées *nouvelles* dans ces mêmes directions,

$$\begin{aligned}
&\text{de } m \ldots && x + u, && y + v,\\
&\text{de } m' \ldots && x + \mathrm{x} + u + \frac{du}{dx}\mathrm{x}, && y + v + \frac{dv}{dy}\mathrm{x},\\
&\text{de } m'' \ldots && x + u + \frac{du}{dy}\mathrm{y}, && y + \mathrm{y} + v + \frac{dv}{dy}\mathrm{y},
\end{aligned}$$

la longueur nouvelle de la petite droite mm', restée presque parallèle à x, sera $\mathrm{x}\left(1 + \frac{du}{dx}\right)$ et, par conséquent, sa dilatation aura été $\frac{du}{dx}$. Et, si l'on a pris $mm'' = mm'$ ou $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, la somme des projections, sur x, du déplacement du point m'', et, sur y, du déplacement du point m', est $\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\mathrm{x}$, en sorte que, d'après ce que nous avons dit art. **8**, le petit rétrécissement de l'angle primitivement droit $m'mm''$, ou le glissement g_{xy}, est $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$. Comme on peut raisonner de même pour les autres dilatations et glissements, on a, *quand* u, v, w *sont très-petits*, les valeurs suivantes :

$$(13)\quad \begin{cases} \delta_x = \dfrac{du}{dx}, & \delta_y = \dfrac{dv}{dy}, & \delta_z = \dfrac{dw}{dz}, \\ g_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}, & g_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}, & g_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}. \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions (4), (7), (8), (10) de p_{xx}, p_{yy}, ..., p_{xy}, on a les six composantes de pression en fonction des déplacements très-petits des points des corps ou *des portions de corps* que l'on considère.

Et si l'on met ensuite ces valeurs de p_{xx}, p_{yy}, ... dans les trois équations générales (12) de l'équilibre d'un élément solide, on obtient trois équations différentielles du second ordre qui sont les *équations indéfinies* (ou applicables à tous les points) des problèmes où il s'agit de la recherche des déplacements u, v, w.

11. *Équations définies, à satisfaire principalement pour les points de la surface.*

Les équations différentielles indéfinies dont nous venons de parler,

sont à intégrer de manière à satisfaire à des conditions géométriques d'immobilité de certains points ou de certains éléments linéaires ou superficiels extrêmes des corps supposés assujettis, ou bien de juxtaposition avec d'autres corps ou d'autres parties du même corps considérées d'abord.

Mais elles doivent satisfaire aussi à des conditions statiques, consistant en ce que certaines parties de leur surface sont soumises à l'action de forces données.

Soient Π ces forces ou *pressions extérieures*, par unité superficielle des divers éléments de surface où elles agissent;

n les directions des normales à ces éléments.

On aura les projections d'un quelconque de ces mêmes éléments sur trois plans perpendiculaires aux x, y, z en multipliant sa superficie respectivement pas $\cos\widehat{nx}$, $\cos\widehat{ny}$, $\cos\widehat{nz}$; et la somme des composantes, dans le sens x, des pressions intérieures qui s'y exerceront sera $p_{xx}\cos\widehat{nx} + p_{yx}\cos\widehat{ny} + p_{zx}\cos\widehat{nz}$.

Faisant de même les sommes de composantes dans les sens y et z, on aura pour l'équilibre entre les pressions intérieures et extérieures, d'après le théorème (art. 4) des projections de plans de pression,

$$(14)\qquad \begin{cases} p_{xx}\cos\widehat{nx} + p_{yx}\cos\widehat{ny} + p_{zx}\cos\widehat{nz} = \Pi\cos\widehat{\Pi x}, \\ p_{xy}\cos\widehat{nx} + p_{yy}\cos\widehat{ny} + p_{zy}\cos\widehat{nz} = \Pi\cos\widehat{\Pi y}, \\ p_{xz}\cos\widehat{nx} + p_{yz}\cos\widehat{ny} + p_{zz}\cos\widehat{nz} = \Pi\cos\widehat{\Pi z}. \end{cases}$$

Ce sont les équations différentielles *définies*, où l'on mettra pour p_{xx}, p_{yx}, ... leurs expressions en fonction des dilatations et glissements, et, par suite (article précédent), en fonction des déplacements.

12. *Application de ces formules à l'extension d'un prisme. — Contractions transversales qui l'accompagnent. — Coefficient d'élasticité.*

Nous allons d'abord examiner ce cas simple, auquel on ramène les circonstances les plus influentes de la flexion des prismes.

Supposons généralement qu'en tous les points d'un corps homo-

gène de forme quelconque, les six composantes de pression $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ *soient constantes* et égales à des nombres donnés. Les six équations du premier degré (4) ou (7), ou (8), ou (10) qui établissent les relations entre elles et $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ étant résolues, donneront aussi pour ces dernières quantités des nombres constants par tout le corps. Et l'on pourra toujours, d'après (13) $\vartheta_x = \frac{du}{dx} \cdots, g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$, trouver des petits déplacements u, v, w qui y satisfassent, en même temps qu'aux conditions particulières telles que l'immobilité de certains points et de certains éléments supposés assujettis; car on n'aura qu'à égaler u, v, w à des fonctions linéaires de x, y, z et qu'à disposer, pour cela, des douze coefficients de ces fonctions.

Les trois équations d'équilibre intérieur (12) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = 0$, $\frac{dp_{xy}}{dy} + \ldots$, dont on fait les seconds membres nuls en négligeant la pesanteur, sont satisfaites aussi par des fonctions linéaires de x, y, z.

Or, si l'on donne les pressions à la surface d'un corps, les pressions intérieures s'ensuivent : elles se règlent par la condition que tous les éléments du volume soient en équilibre, ou que les mêmes équations (12) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \ldots$ soient satisfaites; et le problème, quand on connaît seulement ces pressions extérieures, est complétement déterminé.

Supposons donc, par exemple, *que la forme du corps soit prismatique, qu'aucune pression n'agisse sur ses faces latérales, et que ses bases extrêmes supportent sur tous leurs éléments, parallèlement aux arêtes, une pression ou tension constante dont l'intensité est p par unité superficielle*, en sorte que, les x étant pris dans le sens des mêmes arêtes, les composantes de pression autres que celle p_{xx} soient nulles sur ces bases comme sur les faces latérales. Le problème de la détermination des déplacements pour ces données sera résolu en prenant pour u, v, w des expressions qui satisfassent, par tout le corps, à

$$p_{xx} = p, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = 0;$$

et les composantes de pression auront ces six valeurs aux points de l'intérieur comme à ceux de la surface. En les attribuant aux premiers membres $p_{xx}, \ldots$, des six équations (4), la résolution de celles-ci donnera,

si l'on désigne par E, ε, ε', ..., des fonctions de leurs trente-six (ou quinze) coefficients,

$$\vartheta_x = \frac{p}{E}, \quad \vartheta_y = -\varepsilon\vartheta_x, \quad \vartheta_z = -\varepsilon'\vartheta_x, \quad g_{yz} = \varepsilon''\vartheta_x, \quad g_{zx} = \varepsilon'''\vartheta_x, \quad g_{xy} = \varepsilon''''\vartheta_x.$$

Les dilatations et glissements sont tous proportionnels à la traction longitudinale p.

Le rapport E de celle-ci à la dilatation longitudinale ϑ_x est ce qu'on appelle le *coefficient d'élasticité d'extension.*

Si la matière offre, en chaque point, un plan de symétrie perpendiculaire aux arêtes, il résulte des équations (7), combinées avec $p_{zx} = 0$, $p_{xy} = 0$, que l'on a $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$, ou *que le prisme reste droit.*

Si elle offre trois pareils plans ou plans principaux, se coupant suivant les x, y, z, on a, de plus,

$$g_{yz} = 0.$$

Et les coefficients E, ε, ε' des expressions (que nous récrivons)

$$(15) \qquad \vartheta_x = \frac{p}{E}, \quad p = E\vartheta_x, \quad \vartheta_y = -\varepsilon\vartheta_x, \quad \vartheta_z = -\varepsilon'\vartheta_x$$

sont donnés au moyen des neuf (ou six) coefficients des trois premières (8)

$$p_{xx} = a\vartheta_x + f'\vartheta_y + e''\vartheta_z, \quad p_{yy} = f''\vartheta_x + b\vartheta_y + d'\vartheta_x, \quad p_{zz} = e'\vartheta_x + d''\vartheta_y + c\vartheta_z$$

par les trois équations

$$(16) \quad f'' - b\varepsilon - d'\varepsilon' = 0, \quad e' - d''\varepsilon - c\varepsilon' = 0, \quad a - f'\varepsilon - e''\varepsilon' = E,$$

qui fournissent, dans le cas de *l'isotropie*,

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{e'}{2e + 2e'}, \qquad \frac{E}{e} = 2 + \frac{e'}{e' + e'},$$

ou

$$(17) \qquad \varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{4}, \qquad E = \frac{5}{2}e,$$

si l'on ne conteste pas le principe (art. **7**) de l'égalité du coefficient e' de ϑ_y dans p_{xx} au coefficient e de g_{xy} dans p_{xy}; en sorte que le *coefficient d'élasticité d'extension* E est deux fois et demie celui e qu'on peut appeler le *coefficient d'élasticité de glissement.*

Toute dilatation longitudinale est accompagnée, comme on voit, de contractions transversales qui sont avec elle dans les rapports ε, ε' lorsqu'il n'y a aucune pression normale latérale ou que l'on a

$$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0.$$

Ces rapports ε, ε', ainsi que le coefficient E, *seraient encore les mêmes si* p_{zx}, p_{xy} *n'étaient pas nuls*, ou s'il y avait, sur les faces latérales, des frottements longitudinaux changeant le prisme droit en un prisme légèrement oblique.

Tous ces résultats sont applicables malgré la pression atmosphérique qui agit sur les faces latérales comme sur les bases, si les déplacements ne sont comptés qu'en sus de ceux fort petits qu'elle a déjà produits sur les corps pris dans l'état habituel [*].

---

[*] Nous avons abstrait la pesanteur du prisme. Si on la rétablit et si ϖ est son poids par unité de volume, il est facile de voir que l'on a, l'axe des x étant supposé vertical, et le prisme, d'une hauteur a, étant fixé par sa base supérieure et l'unité de sa base inférieure étant tirée par un poids p :

$$u = \frac{1}{E}\left[px + \varpi\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{\varpi}{2}(\varepsilon y^2 + \varepsilon' z^2)\right],$$

$$v = -\frac{\varepsilon}{E}[py + \varpi(a - x)y], \qquad w = -\frac{\varepsilon'}{E}[pz + \varpi(a - x)z].$$

Ces valeurs donnent en effet, en substituant dans les formules (8) du cas de trois plans d'élasticité, et eu égard à (16),

$$p_{xx} = p + \varpi(a - x), \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = 0,$$

d'où

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = -\varpi,$$

qui est, dans ce cas, la première des équations (12). On suppose que la base attachée est libre de se contracter, et, en même temps, de se courber très-légèrement, comme les autres sections, suivant un paraboloïde elliptique dont l'ordonnée est

$$\frac{\varpi}{2E}(\varepsilon y^2 + \varepsilon' z^2).$$

En faisant $p = 0$, et changeant le signe de ϖ, on a les déplacements des points du même prisme pesant, s'il était posé sur sa base inférieure.

15. *Emploi de ces mêmes formules générales par MM. Poisson* [*] *et Cauchy* [**] *pour la détermination approchée des flexions.*

Les deux illustres géomètres ont trouvé dans le cours de la même année (1828), l'un pour le cylindre à base circulaire, l'autre pour le prisme rectangle, que l'expression connue (2) du moment de flexion de la théorie ordinaire

$$M = \frac{E}{\rho}\int z^2\, d\omega$$

pouvait être regardée comme approximativement exacte « lorsque les » dimensions transversales sont très-petites », en supposant « que les » pressions et les dilatations, aux divers points de chaque section, sont » exprimables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances » entières et positives des coordonnées transversales »; et en effaçant finalement les termes affectés des puissances supérieures.

On peut résumer leur analyse à peu près comme il suit, en l'étendant, ce qui est facile, au cas où la matière n'est point isotrope et n'a même de plans de symétrie ou d'élasticité que perpendiculairement aux arêtes.

Soit pris pour axe des x l'axe de figure du prisme. Si, pour une quelconque de ses sections transversales ω, on exprime la composante normale de pression par la série suivante où l'on suppose que les coefficients A_0, A_1,..., fonctions de x, ont des grandeurs telles, qu'elle soit toujours très-convergente, même pour les plus grandes valeurs des coordonnées transversales y, z, en sorte que chaque terme soit très-petit devant ceux d'un degré inférieur de deux unités :

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{xx} = {} & A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots \\ & + A'_1 z + A'_2 y^2 + A'_3 y^2 z + \dots \\ & + A''_2 z^2 + A''_3 y z^2 + \dots \\ & + A'''_3 z^3 + \dots; \end{aligned}\right.$$

[*] Mémoire lu le 14 avril 1828, tome VIII des *Nouveaux Mémoires de l'Institut*, art. **39.**

[**] *Exercices de Mathématiques*, tome III, pages 250, 256, 262, 358, et tome IV, page 26.

comme $\int y^m z^n d\omega$ est nul pour toute section symétrique par rapport aux axes des y et des z quand l'un des deux exposants m ou n est impair, on aura pour le moment de flexion ou le moment des forces élastiques autour d'un axe parallèle aux y, mené par le centre de ω, une expression

$$(19)\quad M_y = \int p_{xx}\, z d\omega = A'_1 \int z^2 d\omega + A'_3 \int y^2 z^2 d\omega + A'''_3 \int z^4 d\omega + \ldots,$$

dont le premier terme l'emportera de beaucoup sur les suivants.

Or on a, si l'on désigne généralement par une parenthèse avec l'indice zéro la valeur, pour $y = 0$, $z = 0$, de la quantité qui y est renfermée,

$$(20)\qquad A'_1 = \left(\frac{dp_{xx}}{dz}\right)_0;$$

et, en éliminant ∂_y, ∂_z entre les trois premières équations (7) $p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z + h g_{yz}$, $p_{yy} =$ etc., du cas d'un seul plan d'élasticité, on obtient, ε_1, ε'_1, ε''_1 désignant trois fonctions de leurs coefficients, analogues à celles ε, ε' de l'article précédent,

$$(21)\qquad p_{xx} = E\frac{du}{dx} + \varepsilon_1 p_{yy} + \varepsilon'_1 p_{zz} + \varepsilon''_1 p_{yz},$$

d'où

$$(22)\quad \left(\frac{dp_{xx}}{dz}\right)_0 = A'_1 = E\left(\frac{d^2 u}{dx\, dz}\right)_0 + \varepsilon_1 \left(\frac{dp_{yy}}{dz}\right)_0 + \varepsilon'_1 \left(\frac{dp_{zz}}{dz}\right)_0 + \varepsilon''_1 \left(\frac{dp_{yz}}{dz}\right)_0.$$

Mais la deuxième et la troisième équation d'équilibre (12) $\frac{dp_{xy}}{dx} + \ldots = 0$, $\frac{dp_{zx}}{dx} + \ldots = 0$, donnent, en remplaçant p_{xy} et p_{zx} par leurs valeurs (7), puis g_{zx}, g_{xy} par celles (13), et éliminant $\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)$ pour tirer $\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)$,

$$(23)\quad \frac{d^2 u}{dx\, dz} = -\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{e}{ef - h'' h'''}\left(\frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz}\right) + \frac{h'''}{ef - h'' h'''}\left(\frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz}\right);$$

et le premier terme du second membre n'est autre chose que la cour-

bure de la ligne dont x est l'abscisse et w l'ordonnée très-petite, en sorte que, si on y fait $y = 0$, $z = 0$, on a

$$-\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de l'axe du prisme s'il est, comme on suppose, fléchi dans le plan xz. Substituant dans (22) la valeur de $\left(\frac{d^2 u}{dx\,dz}\right)_0$ qui en résulte, puis A'_1 dans (19), on a pour le moment de flexion,

$$(24)\left\{\begin{array}{l} M_y = \dfrac{E}{\rho}\int z^2 d\omega + A'_3\int y^2 z^2 d\omega + A''_3\int z^4 d\omega + \ldots + \\ + \left[\varepsilon_1\left(\dfrac{dp_{yy}}{dz}\right)_0 + \varepsilon'_1\left(\dfrac{dp_{zz}}{dz}\right)_0 + \varepsilon''_1\left(\dfrac{dp_{yz}}{dz}\right)_0 - \dfrac{Ee}{ef - h'' h'''}\left(\dfrac{dp_{yz}}{dy} + \dfrac{dp_{zz}}{dz}\right)_0 + \dfrac{Eh'''}{ef - h'' h'''}\left(\dfrac{dp_{yy}}{dy} + \dfrac{dp_{yz}}{dz}\right)_0\right]\int z^2 d\omega \end{array}\right.$$

Or, si l'on regarde p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} comme exprimables par des développements semblables à celui (18) de p_{xx}, il est facile de voir que, d'après la condition de nullité des pressions sur les faces latérales du prisme, ces trois composantes seront partout, à l'intérieur, du second ordre et du quatrième ordre en y, z et les valeurs particulières de ces coordonnées relatives à la surface. En effet, en nous bornant à une section rectangle dont les côtés sont $2b$, $2c$, si nous représentons par les lettres B (à la place de celles de A relatives à p_{xx}) les coefficients du développement de p_{yy}, la condition $p_{yy} = 0$ pour $y = +b$ et $y = -b$ quel que soit z, donnera cette suite indéfinie d'équations

$$(25)\left\{\begin{array}{l} B_0 + B_2 b^2 + B_4 b^4 + \ldots = 0,\quad B_1 + B_3 b^2 + B_5 b^4 + \ldots = 0, \\ B'_1 + B'_3 b^2 + B'_5 b^4 + \ldots = 0,\quad B'_2 + B'_4 b^2 + B'_6 b^4 + \ldots = 0, \\ B''_2 + B''_4 b^2 + B''_6 b^4 + \ldots = 0,\quad B''_3 + B''_5 b^2 + B''_7 b^4 + \ldots = 0, \ldots, \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit, en tirant les coefficients B_0, B_1, B'_1, B'_2, ... en fonction des coefficients d'ordre supérieur B_2, B_3, ..., et en substituant dans le développement $p_{yy} = B_0 + B_1 y + B'_1 z + \ldots$, que p_{yy} est *au moins du second ordre* en y, b, z. On aura la même chose pour p_{zz} en y, z, c; et, quant à p_{yz}, qui doit s'annuler sur les quatre faces $y = \pm b$, $z = \pm c$, on trouvera qu'il est *du quatrième ordre* en fonc-

tion de ces mêmes coordonnées ou dimensions transversales que nous supposons très-petites. Mettant dans l'expression (24) du moment M_y les développements ainsi trouvés pour p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, ou, plus simplement, mettant pour $\left(\frac{dp_{yy}}{dy}\right)_0$, $\left(\frac{dp_{yy}}{dz}\right)_0$ les valeurs $B_1 = -B_3 b^2 - B_5 b^4 - \ldots$, $B'_1 = -B'_3 b^2 - B'_5 b^4 - \ldots$ obtenues directement de la seconde et de la troisième équation (25) et celles obtenues d'une manière semblable pour $\left(\frac{dp_{zz}}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{dp_{yz}}{dy}\right)_0$, $\left(\frac{dp_{yz}}{dz}\right)_0$, on verra que tout, dans cette expression (24), hors le premier terme, est au moins du quatrième ordre, et, par conséquent, susceptible d'être négligé; d'où, approximativement,

$$M_y = \frac{E}{\rho}\int z^2\, d\omega. \tag{26}$$

Cette analyse, en supposant que l'on conteste la possibilité de développer p_{xx}, p_{yy}, ..., en séries convergentes entières en y, z, peut toujours être regardée comme démontrant la formule (26) avec un peu plus d'approximation ou moins de postulats que la théorie ordinaire; car celle-ci revient à supposer de prime abord p_{yy}, p_{zz} nuls partout, et p_{xx} linéaire en z, tandis que l'analyse qui précède, après avoir supposé simplement ces composantes de pression exprimables par de pareilles séries, n'opère finalement que des suppressions revenant au même que si l'on avait effacé, en commençant, les termes du troisième, du cinquième, etc., degré, en conservant les autres, ce qui laisse toujours une certaine latitude pour représenter, au moins empiriquement, la loi encore inconnue de leurs variations. Et une autre chose doit y être remarquée, c'est que cette même analyse, en s'appuyant sur deux des équations exactes (12) de l'équilibre intérieur, et une fois reconnu et admis que les actions transversales des fibres p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, doivent être très-petites partout, démontre ce que suppose la théorie ordinaire, savoir, que la dilatation ϑ_x est exprimable par $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$ (ϑ_0 étant une constante), si la flexion s'opère dans un plan parallèle aux z; car, comme ces équations se réduisent approximativement à

$$\frac{dp_{xz}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0,$$

on tire de la première

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)=0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dz}\frac{du}{dx}=-\frac{d^2w}{dx^2},$$

qui est sensiblement constant et égal à $-\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_0=\frac{1}{\rho}$ à tous les points d'une même section, vu la petitesse de sa hauteur par rapport au rayon ρ de la courbure que le prisme prend en cet endroit; d'où l'on tire bien, en intégrant,

$$\frac{du}{dx}=\vartheta_x=\vartheta_0+\frac{z}{\rho},$$

et par suite (toujours en raison de la nullité approchée de p_{yy}, p_{zz}, p_{yz},

$$p_{xx}=\mathrm{E}\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right), \tag{27}$$

c'est-à-dire toutes les formules (art. **2**) de la théorie ordinaire.

14. *Données et équations de notre problème de la flexion inégale des prismes.*

Il convient néanmoins de rechercher, comme on a dit art. **3**, et pour des bases de différentes formes, des solutions rigoureuses et sans hypothèse du problème des déplacements produisant une flexion, en prenant au besoin, suivant l'esprit de la méthode mixte ou semi-inverse dont nous avons parlé art. **3**, des données telles, que tout ou partie de ce qui est supposé sans contrôle dans la théorie de Mariotte et Coulomb ait lieu effectivement, et en en cherchant la possibilité et les conditions. C'est ce que nous avons fait au Mémoire déjà cité [*] pour le cas très-exceptionnel de la flexion égale ou circulaire, en nous bornant à des indications pour le cas général de la *flexion inégale*, où les forces ne se réduisent point à des couples.

Pour traiter ce dernier cas, qui comprend l'autre, nous considérerons un prisme ou une portion quelconque d'un prisme sans pesanteur, comprise entre deux bases ou sections droites transversales, et nous nous proposerons de déterminer complétement son état nouveau d'équilibre après que ses points auront été déplacés, en prenant pour données :

[*] *Sur la torsion*, art. **35**, **36**, **40**.

1°. Une partie des déplacements ou de leurs relations, en ce que nous supposons qu'il y a eu un mouvement de flexion dans un certain plan, mouvement auquel nous donnons pour caractère que l'axe du prisme, ou la droite qui unit les centres de gravité de ses sections, se change en une courbe plane, et que les dilatations de ses *fibres* varient transversalement d'une manière uniforme avec leurs distances mutuelles estimées parallèlement au plan de cette courbe;

2°. Une partie des forces, en ce que nous supposons que les mêmes fibres n'exercent mutuellement aucune pression transversale ou perpendiculaire à leur longueur, *tout en pouvant agir les unes sur les autres longitudinalement;* que, sur les faces latérales extérieures, il n'y ait aucune action, même longitudinale; enfin en ce que nous nous donnons arbitrairement, quelque part, la résultante et le moment résultant des forces extérieures dont il n'y a, ainsi, d'inconnu que le mode d'application et de distribution.

A quoi nous ajoutons, non par nécessité, mais *pour simplifier* et ne pas mêler d'abord à la flexion des éléments étrangers tels que translation ou rotation générale, extension de l'axe, torsion (éléments qui peuvent être ajoutés plus tard d'après le théorème de composition de l'art. **6**):

3°. Que l'une des deux extrémités de l'axe du prisme reste immobile ainsi que le plan matériel de l'élément central de la base correspondante, et aussi une bande longitudinale infiniment étroite du plan où la flexion de l'axe s'effectue.

En sorte que nous avons à chercher d'abord si ces données sont compatibles entre elles, et ensuite quelles sont les grandeurs des déplacements dont on ne s'est donné ainsi que quelques relations, et quelles sont les forces non données et qui produisent la flexion.

Prenons toujours pour axe des x l'axe non encore fléchi du prisme, pour origine son extrémité immobile, et pour plan des xz le plan où fléchit cet axe. Et appelons

M le moment, généralement variable ou fonction de x, des forces extérieures autour de parallèles aux y menées sur les sections ω par leurs centres : on suppose nulle la composante longitudinale totale de ces forces;

Pa la valeur de ce moment M pour $x = 0$;

I le moment d'inertie $\int z^2 d\omega$ de la section ;

ρ le rayon de courbure généralement variable de l'axe du prisme.

Comme les distances mutuelles des fibres, projetées sur le plan de flexion xz, sont les différences de leurs ordonnées z, la *première donnée* se trouve exprimée par $\vartheta_x = Cz + C'$, C et C′ étant deux quantités constantes pour chaque section. La donnée principale sur les forces est exprimée par $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{yz} = 0$ qui suffisent, d'après les formules de changement de plans de l'art. **8**, pour annuler toutes leurs actions normales.

Supposons que la matière du prisme ait des plans de symétrie de contexture perpendiculaires aux arêtes ou aux x, en sorte qu'on ait les formules (7) pour les composantes de pressions. La seconde, la troisième et la quatrième, avec zéro pris au premier membre à la place de p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, donneront comme à l'art. **12**,

$$(28) \qquad p_{xx} = E\vartheta_x, \quad \vartheta_y = -\varepsilon\vartheta_x, \quad \vartheta_z = -\varepsilon'\vartheta_x, \quad g_{yz} = \varepsilon''\vartheta_x.$$

Mettant pour ϑ_x la valeur $Cz + C'$ que nous lui attribuons, et posant les équations de l'équilibre de translation, dans le sens x, et de rotation, autour de la parallèle aux y menée par le centre de ω, de la portion du prisme comprise entre cette section et l'extrémité opposée à l'origine, on a

$$0 = \int E(Cz + C')d\omega, \qquad M = \int E(Cz + C')z d\omega ;$$

d'où, comme $\int z d\omega = 0$ en vertu de la propriété du centre de gravité,

$$C' = 0, \qquad C = \frac{M}{EI}.$$

En sorte que les données (1°) et (2°) se trouvent exprimées par

$$(29) \quad \frac{du}{dx} = \frac{Mz}{EI}, \quad \frac{dv}{dy} = -\varepsilon\frac{Mz}{EI}, \quad \frac{dw}{dz} = -\varepsilon'\frac{Mz}{EI}, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \varepsilon''\frac{Mz}{EI},$$

qui, eu égard à $p_{xx} = E\vartheta_x = E\frac{du}{dx}$, $\vartheta_x = Cz$, reviennent au même

que

$$(30)\qquad p_{xx}=\frac{Mz}{I},\quad p_{yy}=0,\quad p_{zz}=0,\quad p_{yz}=0,$$

et auxquelles il faut joindre, pour les données particulières (3°), établissant l'immobilité d'un point et de deux éléments plans,

$$(31)\quad \begin{cases} u=0,\ v=0,\ w=0 \text{ et } \dfrac{du}{dz}=0 \text{ à l'origine ou pour } x=0,\ y=0,\ z=0,\\ v=0 \text{ et } \dfrac{dv}{dz}=0 \text{ sur l'axe ou pour } y=0,\ z=0 \text{ quel que soit } x. \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer des valeurs de u, v, w qui y satisfassent, en même temps qu'aux équations d'équilibre indéfinies (13) $\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}=0,\ldots$, relatives à tous les points du solide, équations qui se réduisent, vu les valeurs (30), à

$$(32)\qquad \frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}=-\frac{z}{I}\frac{dM}{dx},\quad \frac{dp_{xy}}{dx}=0,\quad \frac{dp_{xz}}{dx}=0;$$

et aussi, mais seulement pour des points de la surface extérieure, aux équations définies (14) $p_{xx}\cos\widehat{nx}+p_{xy}\cos\widehat{ny}+p_{xz}\cos\widehat{nz}=\Pi\cos\widehat{\Pi x},\ldots$, à appliquer seulement aux parties de cette surface où l'on connaît les pressions Π, savoir aux faces latérales du prisme, où on les fait nulles. Comme on a, pour ces faces, $\cos\widehat{nx}=0$, la seconde et la troisième de ces équations (14) sont déjà satisfaites par $p_{yy}=0$, $p_{zz}=0$, $p_{yz}=0$, $\Pi=0$; et celle qu'on vient d'écrire, vu que l'on a $\cos\widehat{ny}=-\frac{dz}{ds}$, $\cos\widehat{nz}=\frac{dy}{ds}$, ds étant l'élément du contour de ω, se réduit à

$$(33)\qquad p_{xz}\,dy-p_{xy}\,dz=0;$$

équation qui est à satisfaire aux seuls points des contours des sections, et que l'on pouvait établir directement, soit au moyen du théorème des projections de plans de pression de l'art. 4, soit plus directement, en considérant qu'à toutes les actions moléculaires traversant l'élément superficiel $ds\,dx$ répondent des actions égales et parallèles qui traversent l'une ou l'autre de ses projections $dy\,dx$ et $-dz\,dx$ et qui peuvent les remplacer.

15. *Premières conséquences de ces données et conditions.*

La seconde et la troisième équation indéfinie (32), vu les expressions (7) de p_{xz}, p_{xy}, reviennent à $\frac{dg_{xy}}{dx} = 0$, $\frac{dg_{xz}}{dx} = 0$, ou (formule 13) à

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{d^2v}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2u}{dx\,dz} + \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \tag{34}$$

qui, en mettant pour $\frac{du}{dx}$ sa valeur (29) $\frac{Mz}{EI}$ où le moment M n'est fonction que de x, sont la même chose que

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0, \qquad -\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}. \tag{35}$$

On voit déjà par $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$ que les fibres, après la flexion, n'ont aucune courbure dans le sens y, ou se projettent sur le plan xy suivant des lignes droites, en sorte qu'elles sont toutes des courbes planes; et, par $-\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$, que leurs projections sur le plan xz de flexion de l'axe ont toutes sensiblement la même courbure, aux points appartenant à une même section ω, car $-\frac{d^2w}{dx^2}$ est à peu près, comme on l'a dit déjà, l'inverse de leur rayon de courbure.

On a donc, comme ρ désigne ce rayon,

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{z}{\rho}, \qquad p_{xx} = E\frac{z}{\rho}; \tag{36}$$

en sorte que les formules (1), (2) de la théorie ordinaire sont une suite de nos données et sont vraies quand celles-ci se réalisent.

Mais la première équation d'équilibre (32) $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\frac{z}{I}\frac{dM}{dx}$ prouve que lorsque le moment M, ou la courbure $\frac{1}{\rho}$, est variable, les composantes de pression p_{xy}, p_{xz} et par conséquent les glissements g_{xy}, g_{xz} ne sauraient avoir une valeur nulle à la fois, d'où il suit bien (art. **2** que les sections s'inclinent sur les fibres.

Les mêmes équations (34) $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ montrent qu'en

différentiant deux fois par rapport à x celles (29) $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon\frac{Mz}{EI}$, $\frac{dw}{dz} = -\varepsilon'\frac{Mz}{EI}$, on doit avoir zéro dans le second membre; d'où

$$\frac{d^2M}{dx^2} = 0.$$

En sorte qu'il suit encore de nos suppositions ou *données*, que le moment M des forces extérieures ne peut varier que linéairement avec la coordonnée x dont il dépend, ou qu'on peut poser, puisque nous avons appelé Pa la valeur donnée de M pour $x = 0$,

$$M = P(a - x), \tag{37}$$

en sorte que la constante a représente l'abscisse du point (qui peut être situé dans le prolongement du prisme) pour lequel ce moment variable s'annule.

Et $-P$ est la résultante, dans le sens z, des forces extérieures qui font fléchir, et, aussi (pour l'équilibre de translation latérale) des pressions tangentielles sur les sections ω; de sorte qu'on a, pour toutes,

$$\int_0^\omega p_{xz}\,d\omega = -P. \tag{38}$$

Le cas particulier de la flexion égale ou en arc de cercle répond à P *nul, a infini, mais leur produit* Pa *fini* et égal au moment M alors constant d'un bout à l'autre du prisme, puisque x doit être effacé devant a, en sorte que les forces se réduisent à un couple, et le rayon de courbure $\rho = \frac{EI}{M}$ (expression 36) est constant aussi.

16. *Première intégration.*

Ceci posé, une première intégration des équations (29) $\frac{du}{dx} = \frac{Mz}{EI}$, $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon\frac{Mz}{EI}$, $\frac{dw}{dz} = -\varepsilon'\frac{Mz}{EI}$, $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \varepsilon''\frac{Mz}{EI}$, eu égard à celles (31) donnant u, v, w, $\frac{du}{dz}$ nuls à l'origine et v, $\frac{dv}{dz}$ nuls partout sur l'axe, et à celle (35) $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$, donne facilement, comme on va voir,

en mettant pour M sa valeur (37) $P(a-x)$,

$$(39)\quad \begin{cases} u = P\dfrac{2ax-x^2}{2EI}z + F(y,z), \qquad v = -P\dfrac{a-x}{2EI}(2\varepsilon yz - \varepsilon'' z^2), \\ w = g_0 x + P\dfrac{a-x}{2EI}(\varepsilon y^2 - \varepsilon' z^2) - P\dfrac{3ax^2-x^3}{6EI}; \end{cases}$$

g_0 étant une constante (qui représente le glissement g_{xz} à l'origine des coordonnées) et $F(y, z)$ une fonction qui doit être telle, qu'on ait

$$(40)\qquad F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dz} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$(41)\quad f\frac{d^2F}{dy^2} + (h'' + h''')\frac{d^2F}{dy\,dz} + e\frac{d^2F}{dz^2} = P\frac{E - \varepsilon f - \varepsilon' e + \varepsilon'' h''}{EI}z + \varepsilon\frac{h''' - h''}{EI}Py \text{ partout},$$

$$(42)\quad \begin{cases} \left(h'' - f\dfrac{dz}{dy}\right)\left(\dfrac{dF}{dy} + P\dfrac{2\varepsilon yz - \varepsilon'' z^2}{2EI}\right) + \left(e - h'''\dfrac{dz}{dy}\right)\left(\dfrac{dF}{dz} + g_0 + P\dfrac{\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2}{2EI}\right) = 0 \\ \text{aux points du contour des sections.} \end{cases}$$

En effet, la valeur de u est donnée immédiatement par l'intégration de (29) $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{P(a-x)}{EI}z$. Celles de (29) $\dfrac{dv}{dy} = -\varepsilon\dfrac{Mz}{EI}$, $\dfrac{dw}{dz} = -\varepsilon'\dfrac{M}{EI}$ donnent $v = -\varepsilon\dfrac{Myz}{EI} + \mathcal{F}(x, z)$, $w = -\varepsilon'\dfrac{Mz^2}{2EI} + f(x, y)$, ce qui, en substituant dans la dernière équation (29) $\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy} = \varepsilon''\dfrac{Mz}{EI}$, donne celle $-\varepsilon\dfrac{My}{EI} + \dfrac{d}{dy}f(x, y) = \varepsilon''\dfrac{Mz}{EI} - \dfrac{d}{dz}\mathcal{F}(x, z)$, qui ne peut être satisfaite, M étant fonction de x seul, qu'autant que les deux membres sont une même quantité constante ou fonction de x seul. En la représentant par X, on tire, en intégrant de nouveau, $\mathcal{F}(x, z) = \dfrac{\varepsilon''Mz^2}{2EI} - Xz + \text{const.}$; d'où, en substituant, $v = -\varepsilon\dfrac{Myz}{EI} + \dfrac{\varepsilon''Mz^2}{2EI} - Xz + \text{const.}$ et les conditions (31) $v = 0$ et $\dfrac{dv}{dz} = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$ prouvent que cette quantité X est nulle ainsi que la constante, ce qui donne l'expression (39) de v. Quant à w, puisque $X = -\varepsilon\dfrac{My}{EI} + \dfrac{d}{dy}f(x, y)$ est nul, on a $f(x, y) = \dfrac{\varepsilon My^2}{2EI} + f_1(x)$, en sorte que, comme $\dfrac{d^2M}{dx^2} = 0$,

l'équation (35) $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ donne $-\frac{M}{EI} = \frac{d^2f(x,y)}{dx^2} = \frac{d^2f_1x}{dx^2}$; d'où $f_1(x) = -\frac{1}{EI}\iint M\,dx^2 = -P\frac{3ax^2-x^3}{6EI} + g_0x$, g_0 étant une constante, et l'on a bien ainsi la valeur (39) de w.

Et quant aux conditions auxquelles nous astreignons la fonction $F(y, z)$, celles (40) résultent de (31) $u = 0$ et $\frac{du}{dz} = 0$ à l'origine; celles (41) et (42) ou les équations différentielles indéfinie et définie résultent de la substitution dans celles (32) $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\frac{z}{I}\frac{dM}{dx}$ et (33) $p_{xz} - p_{xy}\frac{dz}{dy} = 0$ des expressions (7) $p_{xz} = eg_{xz} + h''g_{xy}$, $p_{xy} = h''g_{xz} + fg_{xy}$ et (37) $M = P(a - x)$ en faisant, d'après celles (39) de u, v, w, $g_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dF}{dz} + g_0 + P\frac{\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2}{2EI}$, $g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{dF}{dy} + P\frac{2\varepsilon yz - \varepsilon'' z^2}{2EI}$.

La solution complète de la question posée, qui a pour objet, avons-nous dit, après avoir reconnu la compatibilité des données, de déterminer les grandeurs et les directions de tous les déplacements et de toutes les forces, se réduit donc à trouver, par l'intégration de l'équation aux différences partielles du second ordre (41), une fonction F de y, z et une valeur de la constante g_0, qui satisfassent aux conditions (40) et (42) pour les différentes formes qu'on peut attribuer au contour des sections.

On peut déjà juger (*voyez* plus loin, art. 50) que cette solution existe toujours, en sorte que les suppositions prises pour nos données sont compatibles et qu'il y a, ainsi, toujours des manières de répartir les forces extérieures sur les bases extrêmes pour lesquelles la flexion s'opérera dans les conditions exprimées ci-dessus.

Mais il convient de donner plusieurs exemples de détermination complète des déplacements u, v, w, et des diverses circonstances de la flexion, dont plusieurs sont omises par la théorie ordinaire et doivent être prises en considération dans les applications.

Nous nous bornerons pour cela au cas où la contexture de la matière offre des plans de symétrie perpendiculaires aux y et aux z, outre

ceux perpendiculaires aux x. Alors

(43) $h'' = 0$, $h''' = 0$, $\varepsilon'' = 0$; d'où $p_{xy} = f g_{xy}$, $p_{xz} = e g_{xz}$, $g_{yz} = 0$.

Posons alors, pour rendre les expressions plus simples ou plus symétriques,

$$(44) \qquad \frac{\varepsilon f}{E} = \eta, \quad \frac{\varepsilon' e}{E} = \eta', \quad f = G, \quad e = G',$$

en sorte que G, G' sont les *coefficients d'élasticité de glissement* dans les sens y et z, nous avons

$$(45) \qquad \begin{cases} u = P\dfrac{2ax - x^2}{2EI}z + F(y, z), \quad v = -\eta P\dfrac{a-x}{GI}yz, \\ w = g_0 x + P\dfrac{a-x}{2I}\left(\dfrac{\eta y^2}{G} - \dfrac{\eta' z^2}{G'}\right) - P\dfrac{3ax^2 - x^3}{6EI}, \end{cases}$$

g_0 étant une constante et $F(y, z)$ une fonction qui doivent satisfaire à

$$(46) \qquad G\frac{d^2F}{dy^2} + G'\frac{d^2F}{dz^2} = P\frac{1 - \eta - \eta'}{I}z \quad \text{partout},$$

$$(47) \qquad F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dz} = 0 \quad \text{aux points} \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$(48) \qquad \begin{cases} -G\left(\dfrac{dF}{dy} + \eta\dfrac{Pyz}{GI}\right)dz + G'\left[\dfrac{dF}{dz} + g_0 + \dfrac{P}{2I}\left(\dfrac{\eta' z^2}{G'} - \dfrac{\eta y^2}{G}\right)\right]dy = 0 \\ \text{au contour des sections.} \end{cases}$$

17. *Répartition des forces. — Circonstances qui accompagnent la flexion inégale. — Inclinaison et courbure des sections. — Inclinaison mutuelle des fibres. — Flèche complète de flexion.*

Avant d'effectuer dans quelques cas l'intégration de (46) qui doit déterminer F et g_0, il est bon de donner plusieurs expressions qui dépendent de ces deux quantités, et que nous n'aurons plus qu'à particulariser pour les divers exemples.

D'abord, la *répartition* des forces intérieures sur une section quelconque ou des forces extérieures sur les bases ou sections extrêmes sera fournie par

$$(49) \qquad \begin{cases} p_{xx} = P\dfrac{a-x}{I}z, \quad p_{xy} = G\left(\dfrac{dF}{dy} + \eta\dfrac{Pyz}{GI}\right), \\ p_{xz} = G'\left[\dfrac{dF}{dz} + g_0 + \dfrac{P}{2I}\left(\dfrac{\eta' z^2}{G'} - \dfrac{\eta y^2}{G}\right)\right]. \end{cases}$$

Secondement, l'*inclinaison* que prend sur les sections ω, en se courbant, l'axe du prisme, dans son plan xz, est la valeur (art. 5) de $g_{xz} = \frac{p_{xz}}{G'}$ pour $y = 0$, $z = 0$. C'est donc, d'après (49), (47), la constante

$$g_0 ;$$

de sorte que cette inclinaison est la même sur toutes les sections.

En troisième lieu, l'équation de la *surface courbe des sections*, ou de la surface dans laquelle s'est changé le plan de celle ω, sitnée primitivement à la distance x de l'origine, s'obtiendra évidemment, x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées d'un de ses points, en éliminant y et z entre les trois équations suivantes, après y avoir mis, pour u, v, w, leurs valeurs (45) :

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w.$$

Or on peut lui donner une forme simple. En effet, le point central de cette surface, répondant à $y = 0$, $z = 0$, aura ainsi pour coordonnées

$$x_1 = x, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = g_0 x - P \frac{3ax^2 - x^3}{6EI};$$

si l'on y transporte l'origine, et si l'on prend de nouvelles coordonnées rectangles u', y', z' dont la seconde, y', soit parallèle à y, et dont la premiere, u', soit parallèle à la tangente à l'axe fléchi du prisme en cet endroit, en sorte que u' *mesure la distance d'un point quelconque de la section au plan normal* $y'z'$ *mené à cet axe par le point central*, comme la troisième des expressions qu'on vient d'écrire donne, étant différentiée, $g_0 - P \frac{2ax - x^2}{2EI}$ pour le petit angle $\widehat{u'x}$ de l'axe des u' avec celui des x ou x_1, on aura, en faisant $\cos \widehat{y'x_1} = 0$, et $\cos \widehat{z'x_1} = -\sin \widehat{u'x_1} = -g_0 + P \frac{2ax - x^2}{2EI}$ dans la formule de transformation $x_1 = x + u' \cos \widehat{u'x_1} + y' \cos \widehat{y'x_1} + z' \cos \widehat{z'x_1}$, où l'on peut remplacer $\cos \widehat{u'x_1}$ par 1, dont il ne diffère que d'une quantité du second ordre :

$$x + u' + \left(-g_0 + P \frac{2ax - x^2}{2EI}\right) z' = x_1 = x + P \frac{2ax - x^2}{2EI} z + F(y, z).$$

Et, en négligeant toujours les quantités très-petites du second ordre, on peut y mettre y', z' pour y, z, d'où l'on déduit *pour l'équation générale de la surface courbe affectée par la section* ω,

$$u' = g_0 z' + \mathrm{F}(y', z'). \tag{50}$$

Comme cette équation ne contient pas x, on voit que *les sections prennent, par la flexion, toutes la même courbure comme la même inclinaison sur l'axe du prisme.*

Et c'est pour cela, comme nous avons dit art. **2**, que les diverses fibres se dilatent précisément comme si les sections restaient planes et normales à l'axe.

On peut remarquer aussi que les fibres fléchies n'ont pas, à leur passage par une même section, leurs tangentes toutes parallèles. Une fibre quelconque fait, avec la fibre centrale, un petit angle qui, projeté sur les plans xy et xz, a pour mesures les excès de $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dw}{dx}$ sur leurs valeurs pour $y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire, eu égard à $\frac{1}{\rho} = \mathrm{P}\frac{a-x}{\mathrm{EI}}$ résultant de (36) et (37):

$$\eta \frac{\mathrm{P}yz}{\mathrm{GI}} = -\varepsilon yz \frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{P}}{2\mathrm{I}}\left(\frac{\eta' z^2}{\mathrm{G}'} - \frac{\eta y^2}{\mathrm{G}}\right) = -\frac{\varepsilon y^2 - \varepsilon' z^2}{2}\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}. \tag{51}$$

Ces très-petites inclinaisons mutuelles des fibres dépendent, comme l'on voit, de la variabilité, avec x, de leurs contractions transversales δ_y, δ_z par suite de celle de la courbure $\frac{1}{\rho}$ dont dépendent les dilatations longitudinales $\delta_x = \frac{z}{\rho}$ avec lesquelles elles ont les rapports ε, ε'. Elles expliquent les différences que nous trouverons entre $\frac{du'}{dy'}$, $\frac{du'}{dz'}$ et les inclinaisons g_{xy}, g_{xz} des fibres sur les sections.

Enfin on peut tirer de la valeur (45) de $-w$, pour $y = 0$, $z = 0$, $x = a$, ce qu'on appelle la *flèche de flexion*, ou le déplacement transversal de l'axe de prisme au point $x = a$ qui est ordinairement l'extrémité libre où la force P est appliquée. En l'appelant f, on a

$$f = -g_0 a + \frac{\mathrm{P}a^3}{3\,\mathrm{EI}}. \tag{52}$$

Comme g_0 est une quantité négative, cette flèche *complète* est un peu plus grande que ce que donne l'expression généralement usitée $\frac{P a^3}{3EI}$.

Cherchons maintenant F et g_0 pour diverses formes du contour.

18. *Courbes-contour des sections pour lesquelles la fonction arbitraire* F *à déterminer est entière en* y, z. *Contour elliptique, etc.*

Avant de déterminer la forme de F pour le cas de la section rectangle (*voy.* art. **24**, **25**), nous résoudrons un problème inverse, celui de connaître pour quelles formes du contour de la section cette fonction a l'expression la plus simple, savoir :

$$F(y,z) = A_0 y + A y^2 + A' yz + A'' z^2 + B y^3 + B' y^2 z + B'' y z^2 + B''' z^3 + C y^4 + C' y^3 z + \dots .$$

où A_0, A, A', ..., sont des constantes, et où nous n'avons dû mettre ni terme constant ni terme du premier degré en z, afin que F s'évanouisse ainsi que $\frac{dF}{dz}$ pour $y = 0$, $z = 0$.

On trouve, en substituant dans l'équation indéfinie (46), que pour qu'elle soit satisfaite, quels que soient y et z, il faut, entre les coefficients, des relations qui en réduisent le nombre, d'où

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} F(y,z) = A_0 y + A\left(y^2 - \frac{G}{G'} z^2\right) + A' yz + B'\left(y^2 z - \frac{G}{3G'} z^3\right) + B''\left(y z^2 - \frac{G'}{3G} y^3\right) + \\ + P\frac{1-\eta-\eta'}{6G'I} z^3 + C\left(y^4 - 6\frac{G}{G'} y^2 z^2 + \frac{G^2}{G'^2} z^4\right) + C'''\left(y z^3 - \frac{G'}{G} y^3 z\right) + \dots . \end{aligned} \right.$$

Substituant dans la condition définie (48) $-G[\dots]dz + G'[\dots]dy = 0$, nous aurons une équation en y, z, dy, dz, qui sera *l'équation différentielle de toutes les courbes-contour pour lesquelles* F (y, z) *a une expresion entière en* y, z, car cette équation convient à tous les points des contours des sections.

Elle est facilement intégrable sous forme finie lorsque l'on réduit l'expression (53) de F (y, z) aux termes en $y^2 z$ et z^3, qui suffisent pour obtenir une multitude de courbes de tous les degrés. Et l'on simplifie en prenant alors, au lieu du coefficient B', seul subsistant,

une autre indéterminée m ayant avec B′ la relation

$$m = 1 - \eta - \frac{2GI}{P} B',$$

ce qui donne à (53) la forme

$$(54) \qquad F(y, z) = P\frac{m-\eta'}{6G'I} z^3 + P\frac{1-m-\eta}{2GI} y^2 z,$$

en sorte que l'on a, en substituant dans la condition définie (48), cette équation différentielle des divers contours de section

$$(55) - P\frac{1-m}{I} yz dz + \left(G' g_0 + P\frac{m}{2I} z^2 + G'P\frac{1-2\eta-m}{2GI} y^2\right) dy = 0.$$

On la rend homogène en multipliant par y et en faisant

$$y^2 = y', \quad z^2 + \frac{2G'I}{mP} g_0 = z',$$

ce qui permet de séparer les variables en posant $z' = ty'$, et l'on obtient cette intégrale en passant des logarithmes aux nombres, multipliant par y^2 et représentant par C une constante

$$(56) \qquad C y^{\frac{m}{1-m}} + \frac{G'}{G}\frac{1-2\eta-m}{3m-2} y^2 + z^2 = -\frac{2G'I}{mP} g_0$$

Cette équation, si l'on fait $C = 0$, représente des ellipses.

Si l'on donne à C d'autres valeurs que zéro, et si l'on attribue aussi à l'arbitraire m différentes grandeurs, on a une multitude d'autres courbes symétriques par rapport à l'axe des y, et qui le sont ou ne le sont pas par rapport à l'axe des z, selon que l'exposant $\frac{m}{1-m}$ est regardé comme pair ou comme impair.

Il est *regardé comme pair*, quelle que soit sa valeur numérique entière ou fractionnaire, lorsque l'on conserve à $y^{\frac{m}{1-m}}$ le signe + quand y devient négatif. C'est ce que l'on peut faire pour tout exposant impair tel que 1 ou $\frac{9}{10}$ en leur substituant $\frac{2}{2}$ et $\frac{18}{20}$ ou plutôt $\frac{2N}{2N+1}$,

$\frac{18N}{20N+1}$, N étant un nombre entier infiniment grand. Le même exposant est regardé ou *traité comme impair* lorsqu'on change le signe de $y^{\frac{m}{1-m}}$ avec celui de y, ce qui est permis, même avec tout exposant pair tel que 2 ou $\frac{4}{3}$, en écrivant $y\sqrt{y^2}$, $y\sqrt{y^{\frac{2}{3}}}$ au lieu y^2 et $y^{\frac{4}{3}}$ et ne prenant le radical que positivement, ou bien en remplaçant cet exposant par un autre, $\frac{2N+1}{N}$, $\frac{4N+1}{3N}$, dont il diffère infiniment peu.

Si l'on appelle

c le demi-axe de ces courbes dans le sens z ou $-z$;

b leur demi-axe dans le sens $+y$, en sorte que

$$(57)\quad \begin{cases} \text{Pour} \quad y=0 \quad \text{on ait} \quad z=\pm c, \\ \text{Pour} \quad z=0 \begin{cases} y=+b \ \text{toujours}, \\ \text{et aussi} \quad y=-b, \ \text{mais seulement quand } \frac{m}{1-m} \\ \text{est traité comme pair}, \end{cases} \end{cases}$$

on aura pour la constante g_0, en faisant $y=0$, $z^2=c^2$,

$$(58)\qquad g_0=-\frac{mP}{2G'I}c^2;$$

et pour celle C, en faisant $y=b$, $z=0$, une valeur qui, substituée dans l'équation (56) de la courbe, lui donne cette forme

$$(59)\quad \left(1-\frac{1-2\eta-m}{3m-2}\frac{G'b^2}{Gc^2}\right)\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}}+\frac{1-2\eta-m}{3m-2}\frac{G'b^2}{Gc^2}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Lorsque $\frac{m}{1-m}$ est traité comme pair, il faut et il suffit, pour que la courbe ou partie de courbe coupant l'axe des y aux points $y=\pm b$ soit fermée et capable, par conséquent, de servir de contour aux sections des prismes, que $\frac{z}{c}$ ait une valeur réelle lorsqu'on fait $\frac{y}{b}=1-\alpha$, α étant un nombre positif très-petit. Comme on trouve

$$\frac{z}{c}=\sqrt{\frac{\alpha}{1-m}\left[m\left(1+\frac{G'b^2}{Gc^2}\right)-(1-2\eta)\frac{G'b^2}{Gc^2}\right]},$$

cette condition revient à ce qu'on ait ($1-2\eta$ étant positif)

$$(60)\qquad \begin{cases} m \text{ compris entre } \dfrac{1-2\eta}{1+\dfrac{Gc^2}{G'b^2}} \text{ et } 1, \\ \text{ou} \quad \dfrac{m}{1-m} > \dfrac{1-2\eta}{\dfrac{Gc^2}{G'b^2}+2\eta}. \end{cases}$$

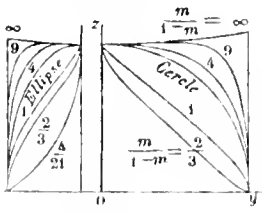
Supposons, par exemple,

$$G'=G, \quad \varepsilon=\frac{1}{4}, \quad \frac{E}{G}=\frac{5}{2}, \quad \text{d'où} \quad \eta=\frac{1}{10}, \quad 1-2\eta=\frac{4}{5}.$$

m peut être tout nombre compris entre $\dfrac{4b^2}{5(b^2+c^2)}$ et 1, ou $\dfrac{m}{1-m}$ peut être tout nombre positif au-dessus de $\dfrac{4b^2}{b^2+5c^2}$, et l'équation (59) devient successivement

$$(61)\qquad \begin{cases} \text{Pour } m=\dfrac{4b^2}{5(b^2+c^2)}, \quad \dfrac{m}{1-m}=\dfrac{4b^2}{b^2+5c^2}: \\ \qquad \left(1+\dfrac{2b^2}{5c^2-b^2}\right)\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{4b^2}{5c^2+b^2}}-\dfrac{2b^2}{5c^2-b^2}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ \text{Pour } m=\dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{m}{1-m}=1; \quad \left(1+\dfrac{3b^2}{5c^2}\right)\sqrt{\dfrac{y^2}{b^2}}-\dfrac{3b^2}{5c^2}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ m=\dfrac{2c^2+0{,}8b^2}{3c^2+b^2}; \quad \text{terme en } \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}} \text{ disparaît}; \\ \qquad \textit{Ellipse} \quad \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ m=\dfrac{4}{5}, \quad \dfrac{m}{1-m}=4; \quad \text{terme en } \dfrac{y^2}{b^2} \text{ disparaît}; \\ \qquad \textit{Fausse ellipse} \quad \dfrac{y^4}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ m=\dfrac{9}{10}, \quad \dfrac{m}{1-m}=9; \quad \left(1+\dfrac{b^2}{7c^2}\right)\sqrt{\dfrac{y^{18}}{b^{18}}}-\dfrac{b^2}{7c^2}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ m=1, \quad \dfrac{m}{1-m}=2.\infty; \quad \left(1+\dfrac{b^2}{5c^2}\right)\left(\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\infty}-\dfrac{b^2}{5c^2}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

La figure ci-contre donne le quart des courbes représentées par



ces équations (61) dans les deux hypothèses $c = b$ et $c = 2b$. La ligne mixte qui les enveloppe répond à $m = 1$, ou l'exposant $\frac{m}{1-m} =$ l'infini pair. Elle se compose, pour les valeurs de $\frac{y^2}{b^2} < 1$, de portions des deux branches de l'hyperbole ayant pour équation

$$-\frac{b^2}{5c^2}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et, pour les valeurs $\frac{y^2}{b^2} = 1$, des deux droites $y = \pm b$, car $y^2 = b^2$ rend z indéterminé. Ce contour mixtiligne se rapproche d'ailleurs beaucoup de la courbe continue qu'on obtient pour $\frac{m}{1-m} = 100$ ou tout autre nombre pair très-grand.

Quand on fait $m = \frac{2}{3}$, ou $\frac{m}{1-m} = 2$, l'équation (59) contient deux termes infinis dont la différence a une valeur finie facile à obtenir en mettant d'abord, pour m, $\frac{2}{3}$ plus une quantité infiniment petite, ce qui produit une équation transcendante

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-(1-6\eta)\frac{G'b^2}{Gc^2}\frac{y^2}{b^2}\log\frac{y}{b}=1$$

représentant une courbe légèrement différente de celle $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Aussi l'*ellipse* s'obtient, non pas en faisant l'exposant $\frac{m}{1-m} = 2$, mais en donnant, comme nous avons dit, à m la valeur suivante qui annule le coefficient de $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}}$,

$$m=\frac{2Gc^2+(1-2\eta)G'b^2}{3Gc^2+G'b^2}. \tag{62}$$

Chaque ellipse, répondant à un rapport déterminé $\frac{b}{c}$ des axes, fait

partie d'une série de courbes dont les axes $2b$, $2c$ ont entre eux tous les rapports $\frac{b}{c}$ possibles, avec un même exposant $\frac{m}{1-m}$ compris entre 2 et $\frac{1}{2\eta} - 1$, ou une même valeur de la constante m entre $\frac{2}{3}$ et $1 - 2\eta$. Ainsi l'ellipse $b = c$, c'est-à-dire le cercle, est un cas particulier des courbes pour lesquelles on a

$$(63)\qquad \begin{cases} m = \dfrac{2G + (1-2\eta)G'}{3G + G'}, \\ \text{ou}\quad m = \dfrac{7}{10},\ \dfrac{m}{1-m} = \dfrac{7}{3} \quad \text{quand} \quad G = G',\ \eta = \dfrac{1}{10}; \end{cases}$$

l'ellipse $c = 2b$ est un cas particulier des courbes où $m = \frac{8,8}{13}$, $\frac{m}{1-m} = \frac{44}{21}$, etc. Aussi il y a, comme on verra (art. **22**), quelques propriétés communes à chaque section elliptique et à une série d'autres courbes pour lesquelles m est le même.

Les courbes de la série des *fausses ellipses* $\frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, où l'exposant $\frac{m}{1-m}$ est $= 4$, ou plus généralement $= \frac{1}{2\eta} - 1$, sont les seules qui puissent se déduire les unes des autres en augmentant ou diminuant dans une même proportion les abscisses y sans faire varier les ordonnées z.

Nous trouverons aussi (art. **25**), aux courbes à exposant $\frac{m}{1-m} = 9$ et plus généralement $\frac{1}{\eta} - 1$ traité comme pair, une propriété digne d'une attention particulière.

Quand l'exposant $\frac{m}{1-m}$ est traité comme impair, en sorte que $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}}$ devienne négatif en même temps que y, les courbes ne sont plus symétriques par rapport à l'axe des z. Pour qu'elles soient fermées, il faut toujours que la condition (60) soit satisfaite; mais il faut, de plus, que $\frac{1-2\eta-m}{3m-2}$ soit positif, car on tire pour ce quotient une valeur

essentiellement positive en faisant, dans l'équation (59) de la courbe, $z = 0$, et $y =$ une valeur négative quelconque $-b'$. On doit donc avoir pour m et l'exposant $\frac{m}{1-m}$ des limites plus resserrées que celles (60), savoir

$$m \text{ compris entre } 1 - 2\eta \text{ et } \frac{2}{3}; \text{ ou } \frac{m}{1-m} \text{ entre } 2 \text{ et } \frac{1-2\eta}{2\eta},$$

c'est-à-dire entre 2 et 4 lorsque $\eta = \frac{1}{10}$. Mais cette condition nécessaire n'est pas encore suffisante; il faut aussi que le rapport $\frac{b}{c}$ reste entre certaines limites qui dépendent de la valeur attribuée à m. Sa limite supérieure est la valeur pour laquelle l'équation (59), avec $z = 0$, a deux racines $\frac{y}{b} = 1$, car, alors, il y a deux branches de la courbe qui se coupent au point $y = +b$, et ce point multiple se change en un sommet de courbe fermée quand on donne à $\frac{b}{c}$ une valeur moindre. On l'obtient en exprimant que $\frac{y}{b} = 1$ satisfasse non-seulement à l'équation (59) avec $z = 0$, mais encore à sa différentielle par rapport à $\frac{y}{b}$, ce qui donne pour la limite supérieure

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G}{G'}\frac{m}{1-2\eta-m}}. \tag{64}$$

La limite inférieure du même rapport $\frac{b}{c}$ répond généralement à la limite supérieure de $\frac{b'}{c}$; elle s'obtient en exprimant que la même équation (59), avec $z = 0$ et en changeant le signe de son premier terme, a deux racines égales, ou que la dérivée de son premier membre s'annule pour la même valeur inconnue $\frac{y}{b} = \frac{b'}{b}$ que le même premier membre non différentié, ce qui donne deux équations entre lesquelles on élimine facilement $\frac{b'}{b}$; d'où la condition

$$\left(1 - \frac{1-2\eta-m}{3m-2}\cdot\frac{G'b^2}{Gc^2}\right)\left(\frac{m}{1-2\eta-m}\cdot\frac{Gc^2}{G'b^2}\right)^{\frac{m}{2-2m}} = \frac{2-2m}{3m-2}, \tag{65}$$

servant à déterminer, par tâtonnement numérique, la valeur de $\frac{b}{c}$ qui est sa limite inférieure, pour chaque valeur de m ou de l'exposant $\frac{m}{1-m}$.

Par exemple, pour $\frac{m}{1-m}=\frac{5}{2}$, ou $m=\frac{5}{7}$, $1-2\eta=\frac{4}{5}$, $G'=G$, on trouve $\frac{5}{\sqrt{3}}=2{,}886751$ et $1{,}05950$ pour ces deux limites de $\frac{b}{c}$. Et les quatre équations suivantes

$$(66)\quad \begin{cases} \text{Pour } \frac{b}{c}=\frac{5}{\sqrt{3}}=2{,}88675, & -4\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}}+5\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & \frac{b'}{b}=0{,}366, \\ \frac{b}{c}=2, & -1{,}4\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}}+2{,}4\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & \frac{b'}{b}=0{,}540, \\ \frac{b}{c}=1{,}5, & -0{,}35\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}}+1{,}35\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & \frac{b'}{b}=0{,}7735, \\ \frac{b}{c}=1{,}05950, & +0{,}326476\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}}+0{,}673524\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & \frac{b'}{b}=2{,}72385, \end{cases}$$

représentent des *ovales* ou courbes ovoïdes *dont un des bouts est plus gros que l'autre*. Le *petit bout* dégénère en pointe pour la première et pour la dernière.

L'axe des z ne passe qu'exceptionnellement par le centre de gravité des sections terminées par ces contours non symétriques; mais peu importe, car comme les fibres (art. **15**) restent toutes dans des plans, tout ce qui précède est également vrai si l'on prend pour axe des x l'une quelconque des fibres qui ne varieront pas de longueur.

19. *Mode d'application et de distribution des forces extérieures qui, pour ces divers contours, rend exactes les formules ordinaires de la flexion due aux dilatations longitudinales. — Valeurs de l'inclinaison centrale* g_0. *— Sections elliptique, circulaire, en fausse ellipse, etc.*

Nous voyons que, pour des prismes ayant des sections de forme extrêmement variée, dont le contour est représenté par l'équation (59),

le problème des art. **5** et **14** a une solution complète, c'est-à-dire que les points de ces prismes éprouvent des déplacements satisfaisant aux conditions (1°, 2°, 3°) de l'art. **14**, ou aux équations (29), (30) qui conduisent *exactement* aux formules ordinaires (36) de la flexion, ou pour mieux dire de la partie de la flexion due aux seules dilatations longitudinales; la courbure de l'axe pouvant être égale ou inégale d'un bout à l'autre du prisme, si, les faces latérales n'éprouvant aucune action, les bases extrêmes sont sollicitées par des forces ayant les expressions (49); expressions qui deviennent, en mettant (58) $\frac{-m\mathrm{P}c^2}{2\mathrm{G}'\mathrm{I}}$ pour g_0, et pour $\mathrm{F}(x, y)$ sa valeur binôme du troisième degré (54):

$$(67)\quad p_{xx} = \mathrm{P}\frac{a-x}{\mathrm{I}}z,\quad p_{xy} = \frac{\mathrm{P}(1-m)}{\mathrm{I}}yz,\quad p_{xz} = -m\mathrm{P}\frac{c^2-z^2}{2\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\mathrm{P}\frac{1-2\eta-m}{2\mathrm{I}}y^2.$$

Comme la deuxième base extrême répond ordinairement à $x = a$, la composante normale p_{xx} est nulle à tous ses points, en sorte que les forces qui font fléchir n'y sont que tangentielles, et leur résultante $-\mathrm{P}$ y est distribuée suivant des lois paraboloïdales.

Par exemple :

1°. Pour $m = \frac{4}{5}$, $\eta = \eta' = \frac{1}{10}$, c'est-à-dire pour la fausse ellipse $\frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ qui porte le chiffre 4 dans la figure de l'art. **18**, et où le rapport des axes $2b$, $2c$, peut être quelconque, on aura simplement

$$(68)\quad \begin{cases} \mathrm{F}(y, z) = \dfrac{\mathrm{P}z}{60\,\mathrm{GI}}(7z^2 + 3y^2), \quad g_0 = -\dfrac{2\mathrm{P}c^2}{5\,\mathrm{GI}}, \\ \text{d'où } p_{xy} = \dfrac{\mathrm{P}yz}{5\,\mathrm{I}},\quad p_{xz} = -2\,\mathrm{P}\dfrac{c^2-z^2}{5\,\mathrm{I}}. \end{cases}$$

Le moment d'inertie $\mathrm{I} = 4\int_0^b dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{y^4}{b^4}}} z^2\,dz = \frac{4c^3}{3}\int_0^b dy\left(1 - \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$, et l'aire $\omega = 4\int_0^b z\,dy = 4c\int_0^b dy\sqrt{1-\frac{y^4}{b^4}}$ peuvent s'obtenir au moyen d'une fonction elliptique de première espèce en posant

$\frac{x}{b} = \cos\varphi$, car on leur donne ainsi la forme

$$\omega = \frac{4\,bc}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\frac{2\sin^2\varphi - \sin^4\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \qquad I = \frac{4\,bc^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\frac{4\sin^4\varphi - 4\sin^6\varphi + \sin^8\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Et comme les deux intégrales, considérées comme indéfinies, reviennent respectivement à

$$\frac{2}{3}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} - \frac{2}{3}\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi},$$

$$\frac{4}{7}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} - \frac{4}{7}\cos\varphi\sin\varphi\left(1+\sin^2\varphi-\frac{\sin^4\varphi}{2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi},$$

on a, les seconds termes s'évanouissant aux limites, et en désignant avec Legendre $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$ par $F'\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ dont la valeur est 1,8540746773o1 (fin de sa table II^e) :

$$(69)\quad\begin{cases}\omega = \dfrac{8\,bc}{3\sqrt{2}}F'\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = 3{,}496076\,bc, \quad I = \dfrac{2}{7}c^2\,\omega = 0{,}99888\,bc^3,\\[2ex] \text{ou, environ, } I = bc^3,\ \omega = \dfrac{7}{2}bc, \text{ d'où, à très-peu près,}\\[2ex] p_{xy} = \dfrac{P}{5\,bc^3}yz,\ p_{xz} = -\dfrac{2\,P}{5\,bc}\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)\text{: et } g_0 = -\dfrac{2\,P}{5\,G'bc} = -\dfrac{7}{5}\dfrac{P}{G'\omega}.\end{cases}$$

La relation $I = \frac{2c^2}{7}\omega$, qui est exacte, pouvait s'obtenir de l'expression (68) de p_{xz} eu égard à ce que l'on a (38) $\int p_{xz}\,d\omega = -P$.

Cette même relation $\int p_{xz}\,d\omega = -P$ donne pour toutes les courbes (59), quel que soit m, en représentant par I′ le moment d'inertie

$\int y^2 d\omega$:

$$(70) \qquad m\frac{c^2\omega - I}{2I} = 1 + \frac{1 - 2\eta - m}{2}\frac{G'I'}{GI},$$

ce qui offre une propriété commune à toutes ces courbes.

2°. Pour $m = \frac{9}{10}$, ou $= \frac{18}{20}$ puisqu'on le considère comme pair (art. précédent), ce qui donne des courbes se rapprochant ordinairement d'un rectangle dont les angles auraient été abattus en pan coupé, on a, en prenant $\eta = \eta' = 0{,}1$, $G = G'$,

$$(71)\ F(y, z) = \frac{2Pz^3}{15GI},\ p_{xy} = \frac{Pyz}{10I},\ p_{xz} = -\frac{9P}{20I}\left(c^2 - z^2 + \frac{y^2}{9}\right),\ g_0 = -\frac{9Pc^2}{20G'I}.$$

Et l'on trouve, par quadratures,

Quand $b = c$, que $\omega = 3{,}8218\,c^2$, $I = 1{,}2326\,c^4 = \frac{\omega c^2}{3{,}1006}$, $g_0 = 1{,}3953\frac{P}{G'\omega}$,

Quand $c = 2b$, que $\omega = 3{,}7676\,bc$, $I = 1{,}1559\,bc^3 = \frac{\omega c^2}{3{,}2596}$, $g_0 = -1{,}4668\frac{P}{G'\omega}$.

3°. Pour $m = 1 = \frac{2}{2}$, ou si (article précédent) le contour est le quadrilatère mixtiligne qui embrasse les autres figures à exposant pair, on a

$$(72)\ F(y, z) = -\frac{3Pz}{20GI}\left(z^2 + \frac{y^2}{3}\right),\ p_{yz} = 0,\ p_{zz} = -\frac{P}{2I}\left(c^2 - z^2 + \frac{y^2}{5}\right),\ g_0 = -\frac{Pc^2}{2G'I};$$

les actions tangentielles sont nulles dans le sens y.

4°. Pour le contour elliptique qui offre un cas plus compliqué puisque, comme nous avons vu, il ne peut pas être donné par une valeur de m indépendante du rapport $\frac{b}{c}$ des axes, il faut prendre pour m la valeur (62), ce qui, eu égard à ce qu'on a dans l'ellipse,

$$(73) \qquad \omega = \pi bc, \quad I = \frac{b}{c}\cdot\frac{1}{2}\int_0^c r^2 . 2\pi r dr = \pi\frac{bc^3}{4} = \frac{\omega c^2}{4}.$$

donne

$$(74)\qquad m=\frac{2\,\mathrm{G}c^2+(1-2\eta)\,\mathrm{G}'b^2}{3\,\mathrm{G}c^2+\mathrm{G}'b^2},\qquad g_0=-\frac{m\,\mathrm{P}c^2}{2\,\mathrm{G}'\mathrm{I}}=-\frac{2\,\mathrm{P}}{\mathrm{G}'\omega}\cdot\frac{2\,\mathrm{G}c^2+(1-2\eta)\,\mathrm{G}'b^2}{3\,\mathrm{G}c^2+\mathrm{G}'b^2}.$$

$$(75)\quad \mathrm{F}(y,z)=\frac{(2-3\eta')\,\mathrm{G}c^2+(1-2\eta-\eta')\,\mathrm{G}'b^2}{3\,\mathrm{G}c^2+\mathrm{G}'b^2}\cdot\frac{2\,\mathrm{P}z^3}{3\,\mathrm{G}'\omega c^2}+\frac{(1-3\eta)\,\mathrm{G}c^2+\eta\mathrm{G}'b^2}{3\,\mathrm{G}c^2+\mathrm{G}'b'}\cdot\frac{2\,\mathrm{P}y^2z}{\mathrm{G}\omega c^2},$$

$$(76)\qquad p_{xy}=\frac{\mathrm{G}c^2+2\eta\mathrm{G}'b^2}{3\,\mathrm{G}c^2+\mathrm{G}'b^2}\cdot\frac{4\,\mathrm{P}yz}{\omega c^2},\quad p_{xz}=-\frac{4\,\mathrm{P}}{3\,\omega}\left[1-\frac{z^2}{c^2}+\frac{(1-6\eta)\,\mathrm{G}'b^2}{6\,\mathrm{G}c^2+2\,\mathrm{G}'b^2}\left(1-\frac{z^2}{c^2}-3\frac{y^2}{b^2}\right)\right].$$

La valeur de p_{xz} donne bien (38) $\int p_{xz}\,d\omega=-\mathrm{P}$, vu que $\int y^2\,d\omega=\frac{\omega b^2}{4}$, ce qui offre une vérification; et l'on a aussi $\int p_{xy}\,d\omega=0$.

5°. Pour le contour circulaire, et la contexture étant supposée égale dans les deux sens transversaux, on a $b=c$, $\mathrm{G}=\mathrm{G}'$, $\eta=\eta'$, $\omega=\pi c^2$, $\mathrm{I}=\frac{\omega c^2}{4}$, d'où (expressions 74, 75, 76)

$$(77)\quad\begin{cases} m=\dfrac{3-2\eta}{4},\quad g_0=-\dfrac{(3-2\eta)\,\mathrm{P}c^2}{8\,\mathrm{GI}}=-\dfrac{(3-2\eta)\,\mathrm{P}}{2\,\mathrm{G}\omega}=-1{,}4\,\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{G}\omega},\ \text{si}\ \eta=\dfrac{1}{10},\\ \mathrm{F}(y,z)=\dfrac{\mathrm{P}(1-2\eta)}{2\,\mathrm{G}\omega c^2}(y^2+z^2)\,z,\\ p_{xy}=\dfrac{\mathrm{P}(1+2\eta)}{\omega c^2}yz,\quad p_{xz}=-\mathrm{P}\dfrac{3-2\eta}{2\,\omega}\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)+\mathrm{P}\dfrac{1-6\eta}{2\,\omega}\dfrac{y^2}{c^2}. \end{cases}$$

On aurait la même expression de $g_0=-\frac{(3-2\eta)\,\mathrm{P}c^2}{8\,\mathrm{GI}}=-\frac{7}{10}\frac{\mathrm{P}c^2}{\mathrm{GI}}$ pour toutes les sections représentées par $\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{14}{6}}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$, c'est-à-dire (art. précéd.) pour toutes les courbes-contour de la série déterminée par la valeur $\frac{m}{1-m}=\frac{7}{3}$ de l'exposant traité comme pair, série dont le cercle fait partie et répond au rapport $\frac{b}{c}=1$ des axes.

6°. On a encore, si $\mathrm{G}'=\mathrm{G}$, $\eta'=\eta=0{,}1$,

$$(78)\quad\begin{cases} \text{Pour une ellipse } c=1{,}5\,b,\quad g_0=-\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{G}\omega}\cdot\dfrac{4c^2+1{,}6b^2}{3c^2+b^2}=-1{,}368\,\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{G}\omega},\\ \text{idem}\qquad c=2\,b,\qquad\qquad\text{idem}\qquad\qquad=-1{,}354\,\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{G}\omega}. \end{cases}$$

En comparant ces valeurs de g_0 pour les divers contours, on voit que *l'inclinaison de l'axe sur les sections est, ou exactement ou à peu près, les* $\frac{7}{5}$ *de ce qu'elle serait si la section en s'inclinant restait plane,* ou si g_{xz} était constant en tous ses points en sorte qu'on eût (équation 38) $\omega p_{xz} = \omega G' g_{xz} = -P$.

20. *Mêmes contours. Flèche complète de flexion.*

Vu la valeur (58) $g_0 = -\frac{m P c^2}{2 G' I}$, la flèche de flexion (52) $-g_0 a + \frac{P a^3}{3 EI} = \frac{P a^3}{3 EI}\left(1 + \frac{3 m}{2}\frac{E}{G'}\frac{c^2}{a^2}\right)$ a les valeurs suivantes si l'on suppose $G = G'$:

(79)

Pour la section circulaire et pour toute section $m = \frac{3-2n}{4}$	$\frac{P a^3}{3 EI}\left(1+\frac{9-6n}{8}\frac{E}{G'}\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{P a^3}{3 EI}\left(1+\frac{21}{8}\frac{c^2}{a^2}\right)$ si $n = \frac{1}{10}$, $\frac{E}{G'} = \frac{5}{2}$.	
Pour une section elliptique et pour toute section $m = \frac{2c^2+(1-2n)b^2}{3c^2+b^2}$	$\frac{P a^3}{3 EI}\left(1+\frac{6c^2+3(1-2n)b^2}{6c^2+2b^2}\frac{E}{G'}\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{P a^3}{3 EI}\left(1+\frac{15c^2+6b^2}{6c^2+2b^2}\frac{c^2}{a^2}\right)$ id.	
Pour toute section en fausse ellipse du 4e degré	$\frac{P a^3}{3 EI}\left(1+\frac{6}{5}\frac{E}{G'}\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{P a^3}{3 EI}\left(1+3\frac{c^2}{a^2}\right)$ id.	quel que soit le rapport de c à b.
Pour la section symétrique du degré $9 = \frac{18}{2}$	$\frac{P a^3}{3 EI}\left(1+\frac{27}{20}\frac{E}{G'}\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{P a^3}{3 EI}\left(1+\frac{27}{8}\frac{c^2}{a^2}\right)$ id.	

Le second terme entre parenthèses rend la flèche *complète* en ce qu'elle représente la proportion de ce qu'on néglige dans la théorie ordinaire où l'on ne tient pas compte des glissements transversaux ou de l'inclinaison prise par les sections sur l'axe.

21. *Mêmes contours. Surfaces courbes affectées par les sections primitivement planes. Leur topographie en général.*

Si, dans l'équation générale (50) $u' = g_0 z' + F(x', z')$ de la surface affectée par les sections infléchies, nous mettons pour g_0 et pour la fonction F leurs valeurs (58) $\frac{-m P c^2}{2 G' I}$ et (54) relatives aux prismes

dont les sections ont des contours rendant F entière du troisième degré (art. **18**), nous avons en ôtant, pour simplifier, les accents de y, z,

$$(80) \qquad u' = -\frac{P}{I}\left(\frac{m}{2G'}c^2 z - \frac{m-\eta'}{6G'}z^3 - \frac{1-\eta-m}{2G}y^2 z\right).$$

Désignons par u_m la valeur de l'ordonnée u' qui répond à $y = 0$, $z = -c$, valeur qui est ordinairement la plus grande de toutes dans les limites de la section, nous aurons

$$(81) \qquad u_m = \frac{2m+\eta'}{3}\frac{Pc^3}{2G'I},$$

et l'équation de la surface peut être écrite

$$(82) \qquad \frac{u'}{u_m} = -\frac{3m}{2m+\eta'}\frac{z}{c} + \frac{m-\eta'}{2m+\eta'}\frac{z^3}{c^3} + 3\frac{G'}{G}\frac{1-\eta-m}{2m+\eta'}\frac{y^2}{c^2}\frac{z}{c}.$$

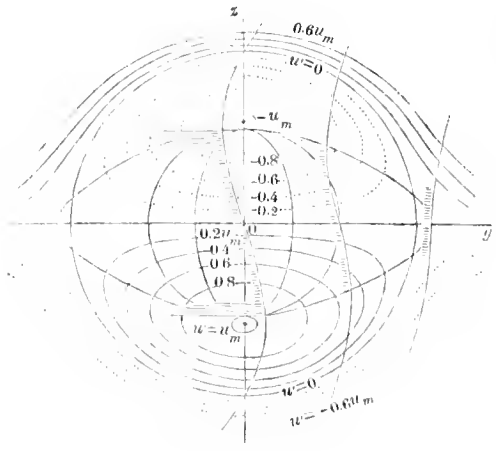
En donnant successivement à $\frac{y}{c}$ et à $\frac{z}{c}$ différentes valeurs 0,1, 0,2, 0,3, etc., cette équation fournit les expressions correspondantes de $\frac{u'}{u_m}$, et, par conséquent, autant qu'on veut des coupes de la surface par des plans perpendiculaires soit aux y, soit aux z; on peut en déduire graphiquement, si on les a amplifiées convenablement dans le sens u', une suite de coupes par des plans équidistants $u' = 0{,}1\,u_m$, $u' = 0{,}2\,u_m, \ldots$, $u = u_m$ perpendiculaires aux u' ou à la tangente à l'axe fléchi du prisme, d'une manière plus facile qu'en résolvant par rapport à y les équations de ces dernières coupes. En les projetant toutes sur l'un de ces plans, le plan $u' = 0$ par exemple, on a une *topographie* complète de la surface.

Sa coupe par le plan $u' = 0$ normal à l'axe du prisme se compose à la fois de la ligne droite $z = 0$, des *fibres invariables* et d'une courbe

$$(83) \qquad \frac{G}{G'}\frac{1-\eta-m}{m}\frac{y^2}{c^2} + \frac{m-\eta'}{3m}\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cette courbe est un cercle dans la figure ci-après, qui est relative

au cas $m = 0{,}7$, $G = G'$, $\eta = \eta' = 0{,}1$, et où l'on a étendu les coupes



hors des contours des diverses sections circulaires ou ovales auxquelles elles conviennent (art. suivant), pour faire bien concevoir la forme de la surface. Elle est, plus généralement, une ellipse lorsque $1 - \eta - m$ et $m - \eta'$ sont de même signe, ou que m est compris entre η' et $1 - \eta$ (ou entre 0,1 et 0,9 quand $\eta = \eta' = 0{,}1$). Et les autres coupes, par des plans parallèles s'éloignant de plus en plus de celui $u' = 0$, sont des courbes fermées de plus en plus petites, et intérieures les unes aux autres, comprises entre l'axe des y et l'une ou l'autre moitié de l'ellipse, savoir, la moitié supérieure répondant à des valeurs positives de z pour les valeurs négatives de u', et la moitié inférieure répondant à des valeurs négatives de z pour les valeurs positives de u'. Elles se réduisent à un point de maximum tombant un peu hors du contour des sections, pour des valeurs de $\pm u'$ répondant à $\frac{du'}{dy} = 0$, $\frac{du'}{dz} = 0$, c'est-à-dire pour

$$(84)\quad y = 0,\ z = \pm c\sqrt{\frac{m}{m-\eta'}},\ u' = \mp u_m \cdot \frac{2m}{2m+\eta'}\sqrt{\frac{m}{m-\eta'}}.$$

Les mêmes plans coupent encore la surface (82) suivant des courbes indéfinies situées au delà de la moitié de l'ellipse (83) opposée à la coupe fermée; et ces courbes indéfinies ont, de part et d'autre, l'axe des y pour asymptotes.

Mais ces dernières courbes n'appartiennent ordinairement qu'à un prolongement idéal de la surface hors du contour de la section, qui reste compris dans l'ellipse enveloppe (83) des courbes fermées, excepté dans les cas assez rares où l'on a $b > c\sqrt{\frac{G'}{G}\frac{m}{1-\eta-m}}$, c'est-à-dire $b > c\sqrt{\frac{m}{0{,}9-m}}$ si $G = G'$, $\eta = 0{,}1$, comme il arrive, par exemple, vers les extrémités du contour ovale le plus grand.

Lorsque $m > 1 - \eta$ et $> \eta'$ (ou lorsque $m > 0{,}9$ si $\eta = \eta' = 0{,}1$), la coupe $u' = 0$ se compose de la ligne droite $z = 0$ et de *l'hyperbole que représente alors l'équation* (83); toutes les autres coupes sont des courbes indéfinies, dont les parties comprises dans le contour de la section, se confondent ordinairement, à peu de chose près, avec des droites parallèles à l'axe des y.

Dans le cas particulier $m = 1 - \eta$, les coupes se réduisent toutes à des droites parallèles (*voy.* art. **25**).

Les coupes de la même surface par des plans $(u'y)$, c'est-à-dire par des plans perpendiculaires aux z ou parallèles à la fois à la ligne oy des fibres invariables et à la tangente u' à la courbe d'axe, sont des paraboles ayant leur axe de figure parallèle à cette tangente, ou situé dans le plan de flexion. On ne les a pas figurées.

On peut aussi considérer, parce qu'elles sont très-remarquables, les coupes de la même surface par des plans obliques passant tous par l'axe des y. Ces coupes, projetées sur le plan yz' normal à l'axe du prisme, sont *des ellipses toutes concentriques conaxiques et semblables* lorsque m (supposé $> \eta'$) est plus petit que $1 - \eta$: ce sont des hyperboles quand $m > 1 - \eta$ (ou lorsqu'il est compris entre 0,9 et 1, η étant $= 0{,}1$). Ce sont des cercles quand la section est circulaire.

Mais les coupes les plus intéressantes à considérer pour les conclusions mécaniques sont celles de la même surface courbe par *le plan de flexion* $(u'z)$ ou (xz), et par les divers plans $y =$ constante qui lui sont parallèles.

On en a tracé et rabattu trois, celle $y = 0$, celle $y = c$, celle $y = 2c$, en donnant une certaine grandeur à u_m pour rendre leur forme bien sensible.

Ce sont des *paraboles cubiques,* courbées en doucine dont le point d'inflexion répond à $z = 0$ ou se trouve sur la ligne des fibres invariables; chacune de leurs moitiés a précisément, en petit, la même forme que prend l'axe fléchi du prisme s'il est encastré à un bout et sollicité à l'autre par la seule force perpendiculaire P. A partir de $y = 0$, la plus grande ordonnée de ces coupes diminue graduellement : elle s'annule pour $y = c\sqrt{\frac{G'}{G} \cdot \frac{m}{1 - \eta - m}}$; et, au delà, comme on voit par celle $m = c$, la coupe change de côté par rapport au plan yz.

Elles montrent bien que c'est au centre ($y = 0$, $z = 0$) que le glissement g_{xz} a la plus grande valeur.

Partout ailleurs qu'en ce point, l'inclinaison $\frac{du'}{dz}$ de ces coupes sur la tangente à la courbe d'axe n'est pas égale à l'inclinaison g_{xz} de la fibre sur la section, dans le sens z : elle en diffère de la petite quantité que mesure la deuxième expression (51) due, comme nous avons remarqué art. **17**, à la variation légère des contractions transversales d'une section à l'autre; ce qui explique aussi pourquoi le maximum de u' (expression 84), ou *la coupe suivant un point*, tombe un peu hors de la section, ou répond à $z = \pm c\sqrt{\frac{m}{m-\eta'}}$ au lieu de répondre aux sommets $z = \pm c$, $y = 0$ pour lesquels on a $g_{xz} = 0$ et la fibre normale à la section.

22. *Suite. Chaque surface courbe des sections est commune à une infinité de contours.*

Une circonstance digne de remarque, c'est que la surface courbe est la même pour toutes les sections ayant le même axe $2c$ dans le sens z, quel que soit leur axe $2b$ dans le sens y, pourvu que la constante m qui entre dans l'équation de leur contour ait la même valeur pour toutes, ou qu'elles fassent (art. **18**) une même *série;* car b ne se trouve pas comme c et m dans l'équation générale (80) de cette surface. Il faut aussi, pour que les surfaces aient la même hauteur u_m et n'aient pas seulement les mêmes coupes, que la force P soit dans le même rapport $\frac{P}{I}$ avec le moment d'inertie. Mais ce n'est que dans le cas de la fausse ellipse dont l'équation est $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1-2\eta}{2\eta}} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, répondant à $m = 1 - 2\eta$, que les contours des sections dont le plan se courbe ainsi de même peuvent se déduire les uns des autres (art. **18**, **23**) en amplifiant ou réduisant les coordonnées parallèles à y dans le rapport des divers axes $2b$.

23. *Particularisation pour diverses sections. Cercle. Fausse ellipse. Sections à contour du neuvième degré qui se courbent exactement en cylindre à base de doucine du troisième degré.*

1°. Lorsque la section est circulaire, on a (expressions 77, 81, 82) en supposant $G = G'$, $\eta = \eta' = 0{,}1$,

$$(85) \qquad m = 0{,}7, \quad u_m = \frac{P c^3}{4GI}, \quad \frac{u'}{u_m} = -1{,}4\frac{z}{c} + 0{,}4\frac{z}{c}\cdot\frac{y^2+z^2}{c^2}.$$

La figure donnée pour exemple art. **21** est, avons-nous dit, relative à ce cas. La coupe de la surface courbe par le plan yz ou $u' = 0$ normal à l'axe, est, avec la ligne $z = 0$ des fibres invariables, *un cercle* extérieur au contour de la section, et dont l'équation se réduit à

$$y^2 + z^2 = \frac{7}{2}c^2,$$

ou dont le rayon est $\sqrt{\frac{7}{2}} = 1{,}87083$ fois celui de la section.

La valeur maximum (84) de u' pour la partie de surface répondant aux courbes fermées est

$$u' = \mp\frac{1{,}4}{1{,}5}\sqrt{\frac{7}{6}}\cdot u_m = \mp 1{,}0081\, u_m, \quad \text{pour } z = \pm c\sqrt{\frac{7}{6}} = \pm 1{,}0801\, c,$$

en sorte qu'elle est, comme nous l'avons expliqué art. **21**, un peu hors de la section dont la plus grande ordonnée $\mp z$ est $= c$.

La doucine suivant laquelle la surface est coupée par le plan xz de flexion $y = 0$ a pour équation

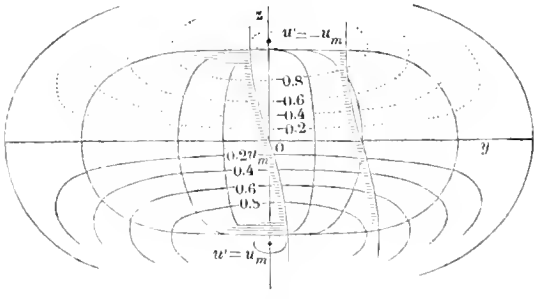
$$u' = -u_m\left(\frac{7}{5}\frac{z}{c} - \frac{2}{5}\frac{z^3}{c^3}\right).$$

La même surface est coupée par des plans obliques passant par la ligne des fibres invariables *suivant des courbes ayant toutes pour projections sur le plan yz normal à l'axe du prisme, des cercles concentriques, et qui peuvent être regardées comme étant ces cercles eux-mêmes*, vu la faible inclinaison de leurs plans sur celui yz. La déformation de la section a consisté ainsi en ce que les circonférences concentriques à

son contour n'ont fait qu'incliner légèrement et diversement leurs plans en tournant autour de la ligne des fibres invariables. *Et le contour de la section est resté une courbe plane.*

Conformément à la remarque de l'article précédent, cette même surface courbe convient à tous les contours représentés par $\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{14}{6}}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$ qui ont le même demi-axe c, pourvu que $\frac{P}{I}$ soit le même aussi; car sans cela les surfaces auraient bien les mêmes coupes, mais à des hauteurs différentes et proportionnelles aux u_m qui varient comme $\frac{P}{I}$. Ceux de ces contours pour lesquels b n'excède pas c ou même $\frac{3}{2}c$ diffèrent fort peu des ellipses ayant les mêmes axes. Aussi cette surface convient encore, très-approximativement, aux sections elliptiques ayant le même demi-axe c et des demi-axes b quelconques plus petits que $1{,}5\,c$. C'est, au reste, ce qu'on verrait également en construisant les surfaces relatives à quelques-uns de ces contours elliptiques, ou les surfaces (50) $u'=g_0 z+\mathrm{F}(y,z)$ avec la forme (75) pour F et les valeurs de c et b que nous venons de dire.

2°. Lorsque l'on considère des sections ayant pour contour la fausse ellipse $\frac{y^4}{b^4}+\frac{z^2}{c^2}=1$, la particularité que nous venons de signaler a lieu, non plus à peu près, mais exactement, conformément à la même observation de l'article précédent. Aussi la figure ci-contre, qui donne pour le cas $\frac{m}{1-m}=4$ ou $m=0{,}8$, la forme de la surface courbe, dont l'équation est alors (si $G=G'$, $\eta=\eta'=0{,}1$)



$$(86)\qquad \frac{u'}{u_m}=-\frac{24}{17}\frac{z}{c}+\frac{7}{17}\frac{z^3}{c^3}+\frac{3}{17}\frac{z}{c}\frac{y^2}{c^2};\quad \left(u_m=\frac{17}{30}\frac{Pc^3}{2GI}\right),$$

convient à toutes les fausses ellipses ayant même demi-axe c, et des demi-

axes b aussi petits et aussi grands qu'on veut, ces courbes étant prises pour contours des sections d'autant de prismes soumis à la flexion.

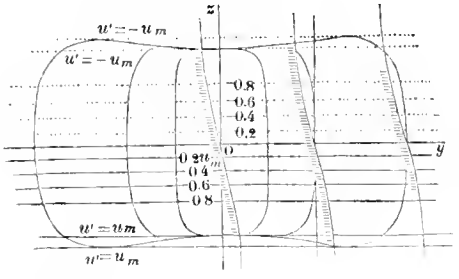
La courbe qui enveloppe les autres est la coupe elliptique représentée par l'équation (83) $\frac{y^2}{8c^2}+\frac{7z^2}{24c^2}=1$.

La partie des coupes $u'=$ constante comprise réellement dans les sections est presque droite quand b n'excède pas c. Mais il n'en est plus de même quand $b=2c$; et, lorsque l'on a $b>2{,}8284\,c$ ou plus grand que le demi-grand axe de l'ellipse-enveloppe (83) des coupes fermées, ou lorsque le contour de la section sort de cette ellipse, la surface courbe a, de chaque côté de la ligne des fibres invariables, des parties qui se replient sur les bords de manière à repasser de l'autre côté du plan yz.

3°. C'est lorsque

$$m=1-\eta,\quad \frac{m}{1-m}=\frac{1-\eta}{\eta},$$

c'est-à-dire $m=\frac{9}{10}$ quand $\eta=0{,}1$, ou que la courbe-contour est l'une de celles du degré 9 *traité comme pair* (art. **18**), que les coupes de la surface par les plans $u'=$ constante sont *toutes rectilignes* et parallèles entre elles, comme on voit à la figure ci-contre, car le terme en y^2z disparaît alors, et l'équation (82) de la surface se réduit à



$$(87)\quad \frac{u'}{u_m}=-\frac{3-3\eta}{2-2\eta+\eta'}\frac{z}{c}+\frac{1-\eta-\eta'}{2-2\eta+\eta'}\frac{z^3}{c^3},\ \text{ou}\ \frac{u'}{u_m}=-\frac{27}{19}\frac{z}{c}+\frac{8}{19}\frac{z^3}{c^3}\ \text{si}\ \eta=\eta'=0{,}1,$$

d'où l'on tire $z=$ constante pour chaque valeur attribuée à u'; en sorte que le plan de la section dont le contour était l'un de ceux ayant pour équation (59)

$$\left(1+\frac{\eta}{1-3\eta}\frac{G'b^2}{Gc^2}\right)\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}-\frac{\eta}{1-3\eta}\frac{G'b^2}{Gc^2}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

s'est changé en une surface cylindrique ayant pour base la *doucine* ou parabole du troisième degré représentée en x' et z par l'équation (87).

24. *Prisme rectangulaire. Transformation des conditions indéfinie et définies.*

Quand la section est un rectangle, la fonction $F(y, z)$ (art. **16**) ainsi que la constante g_0, et, par suite, les valeurs des déplacements u, w, des glissements et des composantes de pression p_{xy}, p_{xz} ne peuvent être obtenus qu'en série transcendante.

Soient, en effet, $2b$ et $2c$ les côtés de cette section parallèlement aux y et aux z. La condition (33) $p_{xz}\,dy - p_{yz}\,dz = 0$ exprimant la nullité des actions longitudinales sur les faces latérales se partage d'elle-même en deux autres $p_{xz} = 0$ ou $g_{xz} = 0$ sur les faces parallèles aux xy, ou pour lesquelles $dz = 0$, et $p_{xy} = 0$ ou $g_{xy} = 0$ sur les faces parallèles aux xz, ou pour lesquelles $dy = 0$. Il faut donc chercher F et g_0 de manière à satisfaire (formules 46, 47, 48)

$$(88)\qquad \text{à } G\frac{d^2F}{dy^2} + G'\frac{d^2F}{dz^2} = P\frac{1-n-n'}{I}z \quad \text{partout},$$

$$(89)\qquad \begin{cases} \text{à } F(y, z) = F(-y, z) \text{ aussi partout (vu la symétrie de la figure et du mode supposé de sollicitation)}, \\ \text{à } F = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{dF}{dz} = 0 \quad \text{aux points} \quad y = 0, \quad z = 0, \end{cases}$$

$$(90)\qquad \begin{cases} \text{à } \dfrac{dF}{dz} = -g_0 - P\dfrac{n'c^2}{2G'I} + P\dfrac{ny^2}{2GI} \text{ pour } z = \pm c, \text{ quel que soit } y \text{ entre } -b \text{ et } b, \\ \text{à } \dfrac{dF}{dy} = -nP\dfrac{yz}{GI} \text{ pour } y = \pm b, \text{ quel que soit } z \text{ entre } -c \text{ et } c. \end{cases}$$

On ne peut faire usage pour cela des procédés connus qu'autant que l'on réduit préalablement à zéro, par une transformation, le second membre de l'une de ces deux équations définies (90). On y arrive pour la deuxième, et l'on annule en même temps le second membre de l'équation différentielle indéfinie (88) en posant

$$F(y, z) = F_1(y, z) + By^2z + B'z^3,$$

F_1 étant une nouvelle fonction, et B, B′ deux constantes dont on détermine la valeur, après substitution de cette expression pour $F(y, z)$ dans (88) et la seconde (90), de manière à produire la double annulation dont nous parlons.

Il en résulte

$$2B = -\frac{\eta P}{GI}, \quad 2GB + 6G'B' = \frac{P}{I}(1 - \eta');$$

d'où, en tirant les valeurs de B, B′ et substituant,

$$F(y, z) = F_1(y, z) + P\frac{1-\eta'}{6G'I}z^3 - \frac{\eta P}{2GI}y^2 z, \tag{91}$$

F_1 devant satisfaire à ces conditions indéfinies et définies :

$$G\frac{d^2F_1}{dy^2} + G'\frac{d^2F_1}{dz^2} = 0 \text{ partout}, \tag{92}$$

$$F_1(-y, z) = F_1(y, z) \text{ aussi partout; et } F_1 = 0, \frac{dF_1}{dz} = 0 \text{ pour } y = 0, z = 0, \tag{93}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dF_1}{dz} = -g_0 - \dfrac{Pc^2}{2G'I} + \dfrac{\eta P}{GI}y^2 \text{ pour } z = \pm c \text{ et } y \text{ quelconque entre } -b \text{ et } b, \\ \dfrac{dF_1}{dy} = 0 \text{ pour } y = \pm b \text{ et } z \text{ quelconque entre } -c \text{ et } c. \end{cases} \tag{94}$$

25. *Intégration en série transcendante.*

On satisfait à l'équation différentielle (92) $G\frac{d^2F_1}{dy^2} + G'\frac{d^2F_1}{dz^2} = 0$ en prenant pour F_1 une somme de termes

$$Ae^{qz}e^{q'y}, \quad q \text{ et } q' \text{ étant liés par } Gq'^2 + G'q^2 = 0;$$

d'où $q' = \pm q\sqrt{\frac{G'}{G}}\cdot\sqrt{-1}$, ce qui donne pour l'intégrale générale, en remplaçant l'exponentielle imaginaire par sa valeur trigonométrique, faisant disparaître le $\sqrt{-1}$ par un choix d'autres coefficients, et désignant par $\sum$ une somme s'étendant à toutes les valeurs possibles de q,

$$F_1 = \sum e^{qz}\left(A_q \cos qy\sqrt{\frac{G'}{G}} + A'_q \sin qy\sqrt{\frac{G'}{G}}\right). \tag{95}$$

Pour qu'on ait (93) $F(-y, z) = F(y, z)$, il faut que les sinus disparaissent ou que $A'_q = 0$. Et, pour avoir $F_1 = 0$ quand $y = 0$, $z = 0$, nous rendrons égaux les coefficients A_q des termes où q a la même valeur avec des signes différents, ce qui nous donnera

$$96) \qquad F_1 = \sum A_q (e^{qz} - e^{-qz}) \cos qy \sqrt{\frac{G'}{G}}.$$

Quant à la troisième condition (93) $\frac{dF_1}{dz} = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$, on ne peut y satisfaire en même temps qu'aux précédentes qu'en posant une certaine relation entre tous les coefficients A ; elle nous servira, plus tard, à déterminer la constante g_0.

La deuxième condition définie (94) $\frac{dF_1}{dy} = 0$ pour $y = \pm b$ deviendra ainsi

$$\mp \sum q \sqrt{\frac{G'}{G}} \cdot A_q (e^{qz} - e^{-qz}) \sin qb \sqrt{\frac{G'}{G}} = 0,$$

quel que soit z. On y satisfera en prenant les quantités q telles que $\sin qb \sqrt{\frac{G'}{G}} = 0$, d'où, n étant un nombre entier quelconque,

$$(97) \qquad q = \frac{n\pi}{b} \sqrt{\frac{G}{G'}}.$$

Il faut mettre cette expression à la place de q dans la formule (96) $F_1 = \sum \cdots$, et l'appliquer à toutes les valeurs de n, y compris $n = 0$, sans quoi l'intégrale ne serait pas générale et pourrait ne point donner ce qu'on cherche. Mais, d'après sa forme, on peut se borner aux termes répondant aux valeurs positives de n, puisque les termes provenant de valeurs égales au signe près s'y réunissent simplement en ajoutant leurs coefficients; et il convient, surtout si l'on considère que la différentiation mettra n en facteur sous le $\sum$, de n'appliquer ce signe qu'aux valeurs de n depuis $n = 1$, en ayant soin d'écrire, en dehors du $\sum$, le terme répondant à $n = 0$.

Afin de voir quel est ce terme, développons les deux exponentielles

pour une valeur de n ou de q supposée d'abord très-petite ; nous aurons $A_q(e^{qz} - e^{-qz}) = A_q \cdot 2qz$ qui sera fini si l'on fait A_q infini en même temps qu'on fait q nul. Désignons ce terme par Kz, nous aurons pour notre intégrale générale

$$(98) \qquad F_1 = Kz + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \left(e^{\frac{n\pi z\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{n\pi z\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} \right) \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Et la première condition définie (94) sera

$$(99) \quad K + \sum_{1}^{\infty} n\frac{\pi\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}} A_n \left(e^{\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} \right) \cos\frac{n\pi y}{b} = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{gP}{GI} y^2 \text{ [*]}.$$

Pour en tirer la valeur générale de A_n, observons que lorsqu'on

---

[*] Observons que nous aurions pu remplir de suite la condition (93) $\frac{dF_1}{dz} = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$, et réserver, au contraire, celle $F_1 = 0$ pour être remplie ultérieurement, en prenant $F_1 = \sum A_q(e^{qz} + e^{-qz}) \cos qy\sqrt{\frac{G'}{G}}$ au lieu de (96). Mais alors le premier membre de l'équation définie (99) eût été affecté du double signe $\pm$, parce que la différence des deux exponentielles prend un autre signe lorsqu'on fait $z = -c$ que lorsqu'on y fait $z = +c$: or il eût été alors impossible de rendre ce premier membre égal au second. Il n'y a donc, des deux conditions *initiales* $F_1 = 0$, $\frac{dF_1}{dz} = 0$, que la première $F_1 = 0$ qui puisse être remplie *pour chacun des termes* (ou des couples de termes) *de la série* $\sum$. L'autre condition $\frac{dF_1}{dz} = 0$ doit être remplie ultérieurement d'une autre manière, ou au moyen de l'ensemble de ces termes.

Observons aussi que nous aurions pu satisfaire à une partie des conditions en affectant de y les exposants réels de e, et de z les exposants imaginaires ou les multiplicateurs des arcs : mais il n'eût pas été possible de remplir la deuxième condition définie (94) $\frac{dF_1}{dy} = 0$ par une infinité de valeurs de q, car il n'y en a qu'une seule, savoir $q = 0$, qui annule $e^{qb} - e^{-qb}$.

L'expression trigonométrique choisie est donc la seule qui convienne à la question parmi celles qui résolvent l'équation différentielle indéfinie (92).

veut développer en une série de cosinus d'arcs dont les multiples sont les nombres naturels depuis 1, une fonction $\varphi(y)$ qui, comme la nôtre $-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \eta\frac{P}{GI}y^2$, ne change pas quand on change le signe de y et que l'on considère seulement dans sa partie comprise entre les limites $y = -b$ et $y = b$, il faut se servir de la formule d'Euler [*]

$$(100)\quad \varphi(y) = \frac{1}{b}\int_0^b \varphi y'.dy' + \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\int_0^b \varphi y' \cos\frac{n\pi y'}{b}\,dy'\right)\cos\frac{n\pi y}{b},$$

dont le terme constant provient de la valeur $n = 0$ comme l'on sait.

$$\text{Or } \frac{1}{b}\int_0^b \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I}\right)dy' = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I},$$

$$\frac{1}{b}\int_0^b y'^2\,dy' = \frac{b^2}{3}, \qquad \frac{2}{b}\int_0^b \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I}\right)\cos\frac{n\pi y'}{b}\,dy' = 0,$$

$$\int_0^b y'^2\cos\frac{n\pi y'}{b}\,dy' = \left[\frac{y'^2 b}{n\pi}\sin\frac{n\pi y'}{b} - \frac{2b}{n\pi}\left(\frac{-b}{n\pi}y'\cos\frac{n\pi y'}{b} + \frac{b^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi y'}{b}\right)\right]_0^b$$

$$= \frac{2b^3}{n^2\pi^2}\cos n\pi = -2\frac{(-1)^{n-1}b^3}{n^2\pi^2};$$

d'où

$$-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{\eta P}{GI}y^2 = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{\eta P b^2}{3GI} - \frac{\eta P}{GI}\left(\frac{2b}{\pi}\right)^2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Égalant au premier membre $K + \sum_1^\infty \cdots$ de (99), puis assimilant, dans les deux membres, les parties constantes qui proviennent des termes répondant à $n = 0$, et assimilant de même, terme à terme, les parties affectées de $\cos\frac{n\pi y}{b}$, on obtient

$$(101)\quad \begin{cases} K = -g_0 - \dfrac{Pc^2}{2G'I} + \dfrac{\eta P b^2}{3GI}, \\ A_n = -\dfrac{4b^3}{\pi^3}\sqrt{\dfrac{G'}{G}}\cdot\dfrac{\eta P}{GI}\cdot\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3}\cdot\dfrac{1}{e^{\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}}. \end{cases}$$

[*] *Disquisitio ulterior super sericbus*, tome XI (1798) des *Nova Acta Academiæ Petropolitanæ*, ou *Traité de Mécanique* de M. Poisson, 2e édition, art. **326**, p. 650.

Nous aurions pu arriver également à ces valeurs à la manière d'Euler et de Fourier, sans supposer connue la formule générale de développement (100), en intégrant d'abord de o à b les deux membres de l'équation de condition définie (99) $K + \sum \ldots = \ldots$, ce qui eût fait disparaître tous les termes du $\sum$, et donné pour résultat la valeur (101) de K que l'on vient d'écrire ; puis, en intégrant aussi entre o et b les deux membres de la même équation de condition (99) multipliés, cette fois, par $dy \cos\frac{n\pi y}{b}$, car, comme on a $\int_0^b dy \cos\frac{n\pi y}{b} = 0$ et $\int_0^b \cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{n'\pi y}{b}dy = 0$ ou $\frac{b}{2}$, selon que n' est différent de n ou que $n' = n$, tous les termes tant hors du $\sum$ que sous le $\sum$ eussent disparu excepté un seul, ce qui eût donné la valeur (101) du coefficient A_n.

Substituant (101) à la place de K et A_n dans (98) $F_1 = Kz + \sum \ldots$. nous avons pour la fonction cherchée

$$(102)\quad F_1(y,z) = \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{\eta P b^2}{3GI}\right)z - \frac{\eta P b^3}{GI}\sqrt{\frac{G'}{G}}\cdot\frac{4}{\pi^3}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\frac{e^{\frac{n\pi z\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{n\pi z\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}}{e^{\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Mais il reste, avons-nous dit, à faire remplir à cette fonction une dernière condition, savoir $\frac{dF_1}{dz} = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$.

Nous disposerons, pour cela, de la constante encore indéterminée g_0, et cela servira à nous faire connaître la valeur de ce glissement à l'origine. Nous aurons ainsi

$$(103)\quad g_0 = -\frac{Pc^2}{2G'I}\left[1 - \frac{G'}{G}\cdot\frac{2\eta b^2}{3c^2}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot\frac{2}{e^{\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}}\right)\right].$$

26. *Expressions des déplacements des points du prisme rectangulaire.*

Substituant cette valeur de g_0 dans celle (45) du déplacement w, et aussi dans l'expression (102) de $F_1(y, z)$ qu'on vient d'écrire, puis ajoutant, d'après celle (91), $P\frac{1-\eta'}{6G'I}z^3 - \frac{\eta P}{2GI}y^2 z$ pour avoir la valeur de $F(y, z)$ à substituer dans u, nous aurons définitivement pour les valeurs des trois déplacements suivant les x, y, z, en représentant en général par $\operatorname{sih}\alpha$ et $\operatorname{coh}\alpha$ les *sinus et cosinus hyperboliques* $\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$ et $\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$ de α :

$$
(104)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= P\frac{2ax-x^2}{2EI}z + (1-\eta')\frac{Pz^3}{6G'I} - \eta\frac{Py^2 z}{2GI} + \eta\frac{Pb^2 z}{GI}\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\operatorname{coh}\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} - \\
&\qquad - \eta\frac{Pb^3}{GI}\sqrt{\frac{G'}{G}}\cdot\frac{4}{\pi^3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\frac{\operatorname{sih}\frac{n\pi z\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}\cos\frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{coh}\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}, \\
v &= -\eta\frac{P(a-x)}{GI}yz; \\
w &= -\frac{Pc^2}{2G'I}\left[1-\eta\frac{G'}{G}\cdot\frac{2b^2}{3c^2}\left(1-\frac{12}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\operatorname{coh}\frac{n\pi c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}\right)\right]x - \\
&\qquad - \frac{P}{2EI}\cdot\frac{3ax^2-x^3}{3} + P\frac{a-x}{2I}\left(\frac{\eta y^2}{G}-\frac{\eta' z^2}{G'}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

27. *Pressions p_{xy}, p_{xz}. Vérification de ces résultats.*

Ces valeurs (104) de u, v, w satisfont évidemment aux quatre équations générales (29) $\frac{du}{dx} = \frac{P(a-x)z}{EI}$, $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon\frac{du}{dx}$, etc. de la question, et, aussi, à $u=0$, $v=0$, $w=0$, $\frac{du}{dz}=0$ pour $x=0$, $y=0$, $z=0$, ainsi qu'à la condition de symétrie en vertu de laquelle u et w restent

les mêmes et v change de signe sans changer de grandeur lorsqu'on met $-y$ pour y.

Pour vérifier les autres conditions qui sont (32) et (33), déduisons d'abord les composantes de pression $p_{xy} = G\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)$ et $p_{xz} = G'\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)$. Nous trouverons

$$(105)\quad \begin{cases} p_{xy} = \frac{\eta P}{I} \cdot \frac{4b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{G'}{G}} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{\operatorname{sih} \frac{n\pi z \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{coh} \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}, \\ p_{xz} = -\frac{P c^2}{2I}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) + \eta \frac{P b^2}{3I} \frac{G'}{G}\left(1 - \frac{3y^2}{b^2} - \frac{12}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{\operatorname{coh} \frac{n\pi z \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{coh} \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}\right). \end{cases}$$

Indépendantes de x l'une et l'autre, elles remplissent bien les deux dernières conditions indéfinies (32) $\frac{dp_{xy}}{dx} = 0$, $\frac{dp_{xz}}{dx} = 0$, et il est bien facile de voir aussi qu'elles vérifient la première $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{P z}{I}$.

Quant à la condition définie (33) $p_{xz}\,dy - p_{xy}\,dz = 0$ qui se décompose, avons-nous dit, en

$$p_{xy} = 0 \text{ pour } y = \pm b, \text{ et } p_{xz} = 0 \text{ pour } z = \pm c,$$

la première partie est évidemment remplie puisque $\sin \frac{n\pi y}{b}$ s'annule pour $b = \pm y$; et, quant à la seconde, l'expression (105) de p_{xz} se réduit, en y faisant $z = \pm c$, à

$$p_{xz} = \frac{\eta P b^2}{3I} \frac{G'}{G}\left(1 - \frac{3y^2}{b^2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b}\right),$$

qui est nulle, puisque, comme nous avons vu, on a, entre les limites $-b$ et b, $y^2 = \frac{b^2}{3} - \frac{4b^2}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b}$, égalité qui peut être vérifiée, du reste, en intégrant successivement les deux membres de 0 à b,

après les avoir multipliés, la première fois par dy, la seconde fois par $dy\cos\frac{n\pi y}{b}$.

Si l'on multiplie par dy l'expression (105) de p_{xz}, et si on l'intègre de $-b$ à b, le $\sum$ disparaît, et même les deux termes $1-\frac{3y^2}{b^2}$ de la parenthèse où il est contenu, en sorte qu'il reste, en divisant par $2b$, *pour la composante moyenne de pression sur chaque bande parallèle aux y*,

$$\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} p_{xz}\,dy = -\frac{\mathrm{P}c^2}{2\mathrm{I}}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right); \tag{106}$$

d'où, en multipliant par $2bdz$ et intégrant de nouveau,

$$\int_{\omega} p_{xz}\,d\omega = \int_{-c}^{c} dz\int_{-b}^{b} p_{xz}\,dy = -\mathrm{P},$$

ce qui doit être (égalité 38, art. 15) pour tous les prismes sollicités par des forces dont la composante totale dans le sens z est $-\mathrm{P}$.

Quant à $\int p_{xy}\,d\omega = \int_{-c}^{c} dz\int_{-b}^{b} p_{xy}\,dy$, on le trouve nul, comme cela doit être, vu la symétrie de sollicitation par rapport au plan xz.

Ce sont deux vérifications de plus des formules qu'on vient de donner.

28. *Glissement central. Courbe d'axe. Flèche de flexion.*

Le glissement central $-g_0$ est donné par l'expression (103). En calculant la série $\sum$ qui y est contenue, nous avons trouvé, si $\eta = 0,1$:

Pour $\frac{c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}=$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	1,25	1,5	2	2,5	3
$-g_0=\frac{\mathrm{P}c^2}{2G'\mathrm{I}}\times$	0,67624	0,84918	0,90729	0,94031	0,96177	0,97101	0,98341	0,98934	0,99259.

Comme le terme $\frac{12}{\pi^2}\sum$ qui y entre a les valeurs successives

0,69648	0,43442	0,21775	0,10464	0,04785	0,02175	0,004537	0,000944	0,000196,

on peut l'effacer toutes les fois que $c\sqrt{G}$ est plus grand que $b\sqrt{G'}$, ou prendre

$$(107) \qquad -g_0 = \frac{P c^2}{2 G' I}\left(1 - \frac{2\eta}{3}\frac{G'}{G}\frac{b^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{P}{G'\omega} - \frac{\eta b^2}{c^2}\frac{P}{G\omega}.$$

Les déplacements des points de l'axe du prisme rectangle sont les valeurs (104) de u, v, w répondant à $y = 0$, $z = 0$, ou

$$(108) \qquad u = 0, \quad v = 0, \quad -w = -g_0 x + \frac{P}{2EI}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

La troisième de ces expressions donne l'équation de la courbe d'axe, équation très-connue si l'on ôte le premier terme $-g_0 x$ que notre analyse ajoute.

La *flèche de flexion*, valeur de $-w$ pour $x = a$, sera, quand on pourra réduire $-g_0$ à (107), $\left(\text{vu que } \eta = \frac{\varepsilon G}{E}, \text{ expression } 44\right)$:

$$f = \left(\frac{P c^2}{2 G' I} - \eta\frac{P b^2}{3 GI}\right) a + \frac{P a^3}{3 EI} = \frac{P a^3}{3 EI}\left(1 + \frac{3 E}{2 G'}\frac{c^2}{a^2} - \varepsilon\frac{b^2}{a^2}\right);$$

on, si $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\frac{E}{G'} = \frac{5}{2}$:

$$(109) \qquad f = \frac{P a^3}{3 EI}\left(1 + \frac{15 c^2 - b^2}{4 a^2}\right).$$

La théorie ordinaire ne tient pas compte du second terme entre parenthèses.

29. *Surface courbe affectée par les sections transversales rectangulaires primitivement planes.*

Si, dans l'équation générale (50) $u' = g_0 z + F(y, z)$ de cette surface rapportée au plan normal à l'axe fléchi du prisme, nous mettons pour la fonction F sa valeur donnée par (91) et (102), le g_0 disparaît et nous obtenons

$$u' = -\frac{P c^3}{2 G' I}\left[\left(1 - \frac{2\eta}{3}\frac{b^2 G'}{c^2 G}\right)\frac{z}{c} - \frac{1 - \eta'}{3}\frac{z^3}{c^3} + \eta\frac{b^2 G'}{c^2 G}\frac{y^2}{b^2}\frac{z}{c} + \eta\left(\frac{2}{\pi}\frac{b\sqrt{G'}}{c\sqrt{G}}\right)^3 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\frac{\operatorname{sih} n\pi\frac{z\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}\cos n\pi\frac{y}{b}}{\operatorname{coh} n\pi\frac{c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}\right].$$

Les valeurs positives de u' répondent aux valeurs négatives de z et ont la même grandeur que celles négatives répondant aux valeurs égales et positives de z.

En appelant, comme à l'art. **21**, u_m la valeur de u' pour $y=0$, $z=-c$, et en désignant par *tah* la tangente hyperbolique, on a

$$(111)\quad u_m=\frac{\mathrm{P}c^3}{2\mathrm{G}'\mathrm{I}}\left[\frac{2+\eta'}{3}-\frac{2\eta}{3}\frac{b^2\mathrm{G}'}{c^2\mathrm{G}}+\eta\left(\frac{2}{\pi}\frac{b}{c}\sqrt{\frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}}\right)^3\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\operatorname{tah}\frac{n\pi c\sqrt{\mathrm{G}}}{b\sqrt{\mathrm{G}'}}\right],$$

expression où la série $\sum$ peut être écrite, eu égard à ce que $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots=0{,}901542677$:

$$0{,}901542\overline{7}-\left(1-\operatorname{tah}\pi\frac{c\sqrt{\mathrm{G}}}{b\sqrt{\mathrm{G}'}}\right)+\frac{1}{2^3}\left(1-\operatorname{tah}2\pi\frac{c\sqrt{\mathrm{G}}}{b\sqrt{\mathrm{G}'}}\right)-\frac{1}{3^3}\left(1-\operatorname{tah}3\pi\frac{c\sqrt{\mathrm{G}}}{b\sqrt{\mathrm{G}'}}\right)+\ldots,$$

et dont le calcul n'exige généralement pas que l'on prenne plus de deux des parenthèses $(1-\operatorname{tah})$. Nous avons obtenu ainsi, en supposant $\eta=\eta'=0{,}1$,

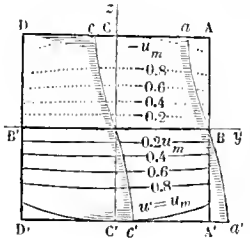
Pour $\frac{c\sqrt{\mathrm{G}}}{b\sqrt{\mathrm{G}'}}=$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	∞
$u_m=\frac{\mathrm{P}c^3}{2\mathrm{G}'\mathrm{I}}\times$	0,602415	0,656498	0,677261	0,686241	0,690822	0,693454	0,700000

Nous avons aussi fait le calcul, plus compliqué, du rapport $\frac{-u'}{u_m}$ pour une suite de valeurs de $\frac{y}{b}$ et $\frac{z}{c}$ croissant par dixièmes, pour le cas $b=c$, $\mathrm{G}=\mathrm{G}'$. Il suffit de prendre de deux à neuf termes du $\sum$ jusqu'à $\frac{z}{c}=0{,}9$ inclusivement; et si, pour $\frac{z}{c}=1$, il en faut prendre jusqu'à trente-cinq, le calcul s'abrége en remplaçant les tangentes hyperboliques par l'unité au delà du troisième terme du $\sum$. Voici les résultats :

Valeurs de $\frac{u'}{u_m}$ *pour le cas* $b = c$, $G = G'$, $n = n' = 0,1$.

Pour $\pm\frac{y}{b} =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\pm\frac{y}{b} = 1,0$
Pour $-\frac{z}{c} = 0,0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$= 0,1$	0,1419	0,1429	0,1432	0,1437	0,1445	0,1455	0,1469	0,1485	0,1506	0,1533	0,1558
0,2	0,2829	0,2831	0,2837	0,2848	0,2863	0,2883	0,2910	0,2943	0,2983	0,3032	0,3088
0,3	0,4178	0,4181	0,4190	0,4205	0,4227	0,4257	0,4295	0,4344	0,4404	0,4476	0,4561
0,4	0,5448	0,5452	0,5463	0,5482	0,5510	0,5548	0,5598	0,5661	0,5740	0,5835	0,5948
0,5	0,6613	0,6617	0,6630	0,6651	0,6685	0,6730	0,6789	0,6865	0,6961	0,7078	0,7219
0,6	0,7648	0,7653	0,7667	0,7690	0,7726	0,7776	0,7842	0,7928	0,8039	0,8176	0,8344
0,7	0,8529	0,8533	0,8547	0,8571	0,8607	0,8658	0,8728	0,8821	0,8943	0,9098	0,9291
0,8	0,9230	0,9234	0,9246	0,9268	0,9302	0,9352	0,9421	0,9515	0,9642	0,9810	1,0028
0,9	0,9728	0,9731	0,9741	0,9759	0,9788	0,9831	0,9894	0,9982	1,0106	1,0278	1,0514
1,0	1,0000	1,0002	1,0008	1,0020	1,0040	1,0072	1,0122	1,0195	1,0303	1,0469	1,0700

Ces chiffres ont servi à tracer l'épure ci-contre. Les lignes hachées ont été construites avec des abscisses z et des ordonnées u' prises dans les colonnes $\frac{y}{b} = 0$ et $\frac{y}{b} = 1$ en choisissant arbitrairement $BA = c$ et $Cc = u_m$, et en répétant inversement ces courbes au-dessous de $B'By$.



En amplifiant, dans le sens u', ces mêmes coupes ainsi que celles intermédiaires fournies par les autres colonnes, on déduit facilement de leurs intersections avec diverses parallèles à CC', les coupes figurées de la même surface par une suite de plans équidistants $u' = \pm 0,2\,u_m$, $u' = \pm 0,4\,u_m, \ldots$, $u' = \pm u_m$, qu'on a projetées toutes sur le plan primitif de la section dont le contour est le carré AA'D'D.

Ces coupes, comme on voit, sont presque rectilignes et parallèles à l'axe des y jusqu'à $u' = \frac{1}{2}u_m$, ou dans la partie où les glissements g_{xz} sont les plus grands. Ensuite, elles s'infléchissent légèrement en tournant leur concavité vers cet axe, tandis que les coupes analogues des surfaces dans lesquelles se transforment les sections du deuxième et du quatrième degré considérées art. **18**, **21** et **23**, tournent leur convexité.

Cela est d'accord avec ce que nous avons vu (art. **25**) pour la section du neuvième degré, se rapprochant ordinairement d'un rectangle à angles très-arrondis, et où les coupes sont toutes rectilignes et parallèles.

Pour une section rectangle où la largeur b serait moitié de l'épaisseur c, le parallélisme en question s'observerait d'ailleurs à peu près pour toutes les coupes

Les portions des valeurs de u provenant de la série trigonométrique, quand $b < c$, ont peu d'influence, ainsi que les autres termes affectés de $\eta \frac{b^2}{c^2} = \frac{b^2}{10\,c^2}$ environ : et l'on peut réduire alors, pour la pratique, les expressions (110), (111) à

$$(112)\quad u' = -\frac{P c^3}{2\,G'I}\left(\frac{z}{c} - \frac{1-\eta' z^3}{3\;c^3}\right) = -\frac{3}{2}\frac{P c}{G'\omega}\left(\frac{z}{c} - \frac{1-\eta' z^3}{3\;c^3}\right) ; \text{ d'où } u_m = \frac{P c}{G'\omega}\left(1 + \frac{\eta'}{2}\right),$$

ce qui fournit pour coupes, au lieu des lignes légèrement courbes de la figure, des droites parallèles aux y passant à peu près aux points de celles-ci répondant à $y = \pm 0{,}7\,b$.

En sorte que l'on peut souvent regarder approximativement les sections comme se changeant dans la surface cylindrique en *doucine* représentée par l'équation (112) [*].

30. *Sections de forme quelconque.*

Nous venons de reconnaître que la détermination des déplacements u, v, w satisfaisant aux conditions du mouvement de flexion défini art. **14**, détermination ramenée par une première intégration (art. **16**) à celle de la fonction F qui, elle-même, au moyen de la relation (91) applicable quelle que soit la forme de la section, se trouve ramenée

---

[*] C'est un résultat auquel nous arriverons directement et simplement dans une note de l'art. **31** relative à un prisme dont la base a sa dimension $2\,b$ très-petite par rapport à celle $2\,c$. Nous l'avons obtenue d'une autre manière (sauf le terme en η' négligé) aux art. **40** et **44** de notre Mémoire cité sur la torsion.

Nous renvoyons au même Mémoire, ou à l'art. **31** ci-après, pour la détermination de la forme nouvelle que prennent, par suite des contractions transversales, les contours des sections, forme qui n'a au reste aucune influence sur les résistances.

à celle de la fonction F_1 devant satisfaire

$$(113)\quad \begin{cases} \text{à } G\dfrac{d^2F_1}{dy^2}+G'\dfrac{d^2F_1}{dz^2}=0 \text{ partout,} \\ \text{à } F=0 \quad \text{et} \quad \dfrac{dF_1}{dz}=0 \quad \text{aux points} \quad y=0, \quad z=0, \\ \text{à } -G\dfrac{dF_1}{dy}\cdot\dfrac{dz}{dy}+G'\left(\dfrac{dF_1}{dz}+g_0+\dfrac{Pz^2}{2G'I}-\dfrac{nPy^2}{GI}\right)=0 \text{ sur le contour des sections,} \end{cases}$$

pouvait se faire analytiquement d'une manière complète pour des sections rectangulaires, et aussi (art. **18**, **19**) pour des sections à contours curvilignes de forme extrêmement variée.

Cela montre suffisamment qu'avec des sections de forme absolument quelconque, les points des prismes peuvent toujours prendre des déplacements satisfaisant aux mêmes conditions, car la forme des contours peut bien influer sur la difficulté de déterminer les valeurs de ces déplacements u, v, w, mais ne saurait rendre leur existence tantôt possible, tantôt impossible : elle peut compliquer analytiquement la dernière des conditions (113), à cause de $\frac{dz}{dy}$ qui dépend de l'équation du contour, mais elle n'augmente pas le nombre des conditions, et puisqu'elles peuvent être remplies pour certaines sections, il doit, statiquement, en être de même pour toutes ; ce qu'on peut étendre au cas plus général des équations (39) à (42) relatives à un prisme dont la matière n'a de plans principaux d'élasticité que perpendiculairement à ses arêtes.

C'est, au reste, ce qu'on peut rendre sensible par une comparaison physique. La recherche de la fonction F_1 satisfaisant aux conditions (113) qu'on vient d'écrire, n'est autre chose que la recherche des températures permanentes F_1 qui seraient prises par les points du prisme, ou d'une de ses tranches de longueur finie ou infiniment petite, si l'on rendait les deux bases imperméables et si l'on faisait traverser les faces latérales par des *flux* constants de chaleur parallèles aux y et aux z, et ayant entre eux les relations auxquelles la dernière équation (113) assujettit les coefficients différentiels $\frac{dF_1}{dy}$, $\frac{dF_1}{dz}$ (représentant ces flux comme l'on sait), aux divers points du contour des sections ; flux qui

sont les uns entrants, les autres sortants, et ceux-ci égaux à ceux-là non pas seulement au total, mais individuellement pour mêmes valeurs soit de y, soit de z, si le contour a une forme symétrique. Un pareil état permanent des températures s'établira toujours, quelle qu'ait été leur distribution initiale dans le prisme.

Il pourra toujours être rendu tel qu'on ait $F_1 = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$, ou que la température soit zéro du thermomètre au centre de la section en ajoutant ou retranchant un même nombre de degrés en tous les points, ce qui n'empêchera pas l'état de se conserver, et l'on pourra disposer de l'indéterminée g_0 pour que cet état soit tel aussi qu'on ait $\frac{dF_1}{dz} = 0$ au même centre.

Nous regarderons donc comme établi qu'il existe, pour tout prisme, un mode d'application et de distribution sur ses deux bases, de forces ayant une résultante et un moment résultant donnés, tel que les dilatations longitudinales des fibres varient linéairement ou uniformément avec la distance quand on passe transversalement de l'une à l'autre, comme quand on considère divers points de chacune, et que les contractions transversales soient avec les dilatations dans les rapports qu'il faut pour que les fibres ne se pressent point l'une l'autre perpendiculairement à leur longueur; ou, autrement dit, pour que les formules usitées représentent exactement ces dilatations des fibres et les pressions sur les sections, aussi dans le sens longitudinal, ainsi que la courbure due à l'inégalité des mêmes dilatations. En sorte qu'on pourra toujours les appliquer, sauf à y joindre, au moyen d'autres formules, comme celles dont nous avons donné des exemples, ce qu'omet la théorie ordinaire et qui n'est pas toujours négligeable, savoir les effets dus aux glissements relatifs des sections ou des fibres, afin de déduire de leur combinaison les flèches complètes (art. **20** et **28**), ainsi que les plus grandes dilatations qui ont lieu dans un sens oblique et qu'il convient de limiter pour garantir de toute altération, même éloignée, la cohésion de la matière (art. **3** ci-dessus et chapitre XII du Mémoire sur la torsion).

Ces modes d'application et de distribution des forces sur les bases sont donnés par les expressions (49), art. **17**, de p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} en particularisant les deux dernières pour chaque forme de F, et en ajoutant

à la première, $p_{xx} = \mathrm{P}\,\frac{a-x}{\mathrm{I}}\,z$, un terme constant $\frac{\mathrm{Q}}{\omega}$ lorsqu'il y a, outre la force transversale P, une traction longitudinale Q uniformément répartie que nous avons abstraite à l'art. **14** pour simplifier, et qui ne fait qu'ajouter $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\omega}$ aux dilatations $\frac{\partial u}{dx}$. On pourrait même facilement, en raisonnant comme à l'art. **12**, et en vertu du théorème général (art. **6**) de composition des déplacements dus à différentes forces, modifier les résultats pour le cas où les faces latérales supporteraient la pression constante d'un fluide dont les effets ne soient pas censés précomptés comme ceux de la pression atmosphérique.

31. *Démonstration directe et sans analyse des formules connues de la flexion des prismes, due à leurs seules dilatations longitudinales.*

Une pareille démonstration de ces formules (1) qui peuvent être écrites

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{z}{\rho}, \quad p = \mathrm{E}\left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}\right),$$

quand on ajoute à la dilatation variable $\frac{z}{\rho}$ une dilatation générale ϑ_0, et d'où l'on déduit (2)

$$\mathrm{Q} = \mathrm{E}\omega\vartheta_0, \quad \mathrm{M} = \frac{\mathrm{E}}{\rho}\int z^2\,d\omega$$

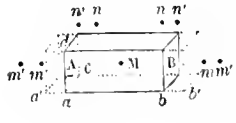
pour la traction totale Q et pour le moment de flexion M lorsque la ligne $z = 0$ passe au centre de gravité, est, avons-nous dit, très-désirable (art. **3**) pour pouvoir les enseigner dans les cours qui ne comportent pas l'établissement préalable des formules différentielles et intégrales de la théorie de l'élasticité, et où il convient cependant de ne pas partir d'hypothèses gratuites et souvent fausses.

Pour y arriver, nous rechercherons, par le seul raisonnement, à quelles conditions les fibres dilatées d'un prisme n'exercent les unes sur les autres latéralement aucune action perpendiculaire à leur longueur ou aux arêtes, ce qui amènera nécessairement à parler des contractions transversales accompagnant alors leurs dilatations longitudinales; puis, après avoir montré que les bases très-petites de ces

fibres peuvent toujours, *en conservant leur contiguité,* être modifiées simultanément de manière que cette condition de nullité d'action normale soit remplie, quand les dilatations longitudinales varient linéairement ou uniformément en passant d'une fibre à l'autre dans deux sens transversaux, nous montrerons que si seulement les deux bases extrêmes du prisme sont supposées éprouver des tractions longitudinales variant suivant cette loi linéaire, avec ou sans actions tangentielles transversales distribuées d'une certaine manière, il en est nécessairement de même sur toutes les autres sections du prisme dont on suppose que les faces latérales n'éprouvent aucune action extérieure; que, par suite, on a exactement (même quand il y a des pressions latérales constantes comme celles d'un fluide), les formules connues de la flexion susceptibles d'être étendues *approximativement* aux cas où les forces agissant aux extrémités sont un peu autrement appliquées et distribuées, et qui sont à compléter, du reste, de toute manière, par les formules moins simples donnant les glissements, dans les cas où l'influence de ceux-ci n'est pas négligeable.

Supposons donc qu'un corps élastique homogène ait été divisé par la pensée en éléments parallélipipèdes rectangles tous égaux, en substituant au besoin à sa surface généralement courbe une suite de petits plans. Après l'action de forces extérieures, les côtés de ces éléments se sont un peu allongés ou raccourcis, et même généralement inclinés les uns sur les autres de manière à rendre les parallélipipèdes légèrement obliquangles. Les molécules du dedans de chacun se trouvant plus rapprochées ou plus écartées qu'auparavant de celles des éléments environnants, il s'engendre des actions moléculaires nouvelles dont les résultantes, prises à travers les diverses faces de contact de ces éléments, sont leurs pressions ou tractions mutuelles. La grandeur et la direction de ces pressions ou tractions dépend des proportions des petites dilatations ou contractions des côtés ainsi que des petites inclinaisons qu'ils peuvent avoir prises les uns sur les autres.

Si, par exemple, les côtés sont restés rectangulaires, et si l'un d'eux



ab est devenu *ab'* ou s'est dilaté sans que les deux autres *ac*, *ad* aient changé, comme les molécules *m*, *m*, *n*, *n* des éléments contigus, qui ont participé à ce mouvement, auront pris des positions

nouvelles telles que m', m', n', n', les molécules M de l'intérieur s'en seront toutes éloignées, mais plus de celles m, m situées au delà des faces A, B perpendiculaires à la dimension augmentée ab, que de celles n, n situées au delà des faces parallèles à ab. Si la dimension ab s'est contractée au lieu de s'être dilatée, les distances des molécules du dedans aux molécules du dehors de l'élément qu'on considère, auront au contraire toutes diminué, mais toujours plus à travers les faces A, B qu'à travers les quatre autres faces.

Toute dilatation d'un élément dans le sens d'une de ses trois dimensions développe ainsi des actions attractives, et produit des *tractions* ou *tensions* à travers ses six faces, et toute contraction produit à travers les mêmes faces des actions répulsives ou *pressions* proprement dites : mais ces tractions ou pressions engendrées sont plus fortes, *en les rapportant à l'unité superficielle des faces*, à travers celles perpendiculaires qu'à travers celles parallèles aux dimensions dilatées ou contractées. Et l'on pourra leur donner, en faisant varier les dilatations et contractions, telle grandeur qu'on voudra, dans les limites de la cohésion de la matière.

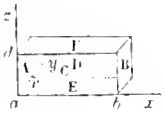
De plus, suivant le mode de contexture moléculaire, contexture grenue, fibreuse, lamelleuse, etc., et qui, bien que supposée la même en tous les points du corps homogène, peut être très-inégale en divers sens, les tractions ou pressions pourront avoir des directions plus ou moins obliques aux faces où elles s'exercent, même lorsque les éléments seront restés rectangulaires; à plus forte raison s'ils sont devenus, comme nous disions tout à l'heure, légèrement obliquangles. En sorte que ces résultantes d'actions peuvent même quelquefois être purement *tangentielles* ou se réduire à des espèces de frottement ou d'adhésion parallèle sur les mêmes faces.

Cette contexture de la matière peut, au reste, être telle que toute modification très-petite des petits prismes AB changeant ou ne changeant pas l'angle dac des faces latérales, mais n'altérant point la perpendicularité des arêtes ab sur les deux bases A, B, n'engendre jamais sur celles-ci que des actions *longitudinales* ou parallèles à ab, et sur les quatre faces latérales que des actions *transversales*, c'est-à-dire perpendiculaires aux mêmes arêtes; et que toute inclinaison très-petite des arêtes sur les bases ne développe que des actions tangentielles,

longitudinales sur les faces latérales et *transversales* sur les bases. Il suffit pour cela, comme il est facile de voir, que les molécules offrent dans leur arrangement une certaine symétrie par rapport à toutes les sections transversales ou parallèles aux faces A, B prises pour bases. *Et c'est cette sorte de contexture moléculaire que nous supposerons toujours.*

S'il y a à la fois dilatation des éléments dans un ou deux sens, et contraction dans l'autre ou dans les deux autres, il résulte du théorème de composition correspondante des forces et des petits déplacements (théorème dont nous ne reproduirons pas ici la démonstration donnée sans calcul à l'art 6), que les pressions sur les diverses faces seront résultantes de ce qui serait dû à ces deux modifications successivement opérées. Et il suit du même théorème que deux, trois, etc., petits changements égaux développeront des forces doubles, triples, etc., ou que *les forces sont proportionnelles aux petits changements*, soit de dimensions, soit d'angles dont elles proviennent, et que réciproquement elles peuvent produire.

Ces changements pourront donc être entre eux dans des rapports tels qu'il y ait, à travers quelques-unes des faces, par exemple les faces latérales, destruction mutuelle des forces, ou compensation entre les actions attractives et les actions répulsives, de sorte que ces quatre faces C, D, E, F d'un élément n'éprouvent ni pression ni traction de la part des éléments contigus, tandis que les autres, ou les bases A, B, en supportent d'aussi grandes qu'on veut. Ainsi, supposons que, tous les angles restant droits, il y ait par unité de longueur une dilatation δ dans le sens longitudinal ab, des dilatations $-\delta'$ (ou des contractions δ') dans les sens transversaux ac, ad, et que, d'après la contexture de la matière, toute dilatation dans un sens produise respectivement, sur l'unité des faces perpendiculaires et sur l'unité des faces parallèles, des tractions égales à cette dilatation multipliées par deux certains nombres n e pour les premières et e seulement pour les secondes faces. On aura 1° sur les faces A, B perpendiculaires à a, b, des tractions



$n\mathrm{e}\delta + \mathrm{e}(-\delta') + \mathrm{e}(-\delta')$; 2° sur les autres faces C, D, E, F, des tractions $n\mathrm{e}(-\delta') + \mathrm{e}(-\delta') + \mathrm{e}\delta$. Celles-ci seront nulles si l'on a $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{n+1}$; et celles-là, ou les

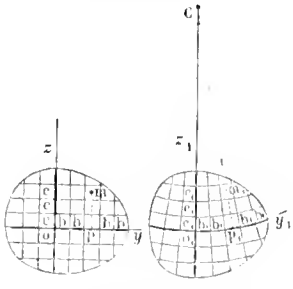
tractions sur les *bases*, auront alors pour valeur $\left(ne - \frac{2e}{n+1}\right)\delta$. En sorte que si l'on a $n = 3$, *les fibres latérales n'éprouveront aucune action* lorsque les contractions transversales δ' seront le $\frac{1}{4}$ de la dilatation longitudinale δ. Et les tractions sur les bases seront alors égales à la dilatation longitudinale δ multipliée par le nombre $e\left(n - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{5}{2}e$. C'est ce nombre, *quel qu'il soit pour les divers cas,* par lequel il faut multiplier la proportion de l'extension longitudinale d'un élément prismatique pour avoir la force de traction capable de la produire, pour l'unité superficielle de la base de l'élément, *lorsque les faces latérales ne supportent aucune action perpendiculaire aux arêtes,* qui est appelé en général *coefficient d'élasticité d'extension* de la matière dans ce sens des arêtes du petit prisme.

Ceci établi, soit un prisme à base quelconque divisé par deux systèmes de plans rectangulaires parallèles à ses arêtes, en *fibres* longitudinales prismatiques. Supposons ces fibres partagées elles-mêmes en éléments parallélipipèdes rectangles par des plans transversaux ou perpendiculaires aux mêmes arêtes, plans par rapport auxquels la contexture moléculaire est supposée jouir de la *symétrie* que nous avons définie par ses effets, et qui paraît avoir lieu très-souvent.

Je dis que si les dilatations longitudinales des fibres, aux points où elles traversent une même section transversale ω du prisme, ne varient que linéairement dans deux sens rectangulaires aussi transversaux, c'est-à-dire croissent ou décroissent uniformément avec les distances comptées dans ces deux sens sur ω, on pourra toujours transformer leurs bases, ou les petits rectangles dans lesquels cette section ω se trouve divisée, en figures qui, *sans cesser d'être contiguës,* auront précisément les formes et les dimensions qu'il faut *pour que les faces latérales des fibres n'éprouvent aucune pression perpendiculaire aux arêtes.*

En effet, supposons d'abord, pour simplifier : 1°. Que la matière offre également la symétrie par rapport aux deux autres systèmes de plans de séparation des éléments convenablement choisis, ou *que les dilatations et contractions de leurs côtés n'engendrent,* comme on a dit tout à l'heure, *que des pressions perpendiculaires à leurs faces.*

2°. Que la dilatation longitudinale ne varie que dans l'un des deux sens, celui oz, des lignes de division de la section ω, et que, pour une fibre quelconque dont la base a son centre en m, elle soit représentée par $\frac{z_1}{\rho}$, ρ étant une constante nécessairement très-grande par rapport à z_1, qui est ce que devient la coordonnée $mp = z$, distance positive ou négative de m à une ligne de division oy dans l'autre sens. Représentons par ε et ε' les rapports constants $\left(\frac{1}{4}\right.$ l'un et l'autre dans l'exemple pris tout à l'heure$\left.\right)$ qu'il doit y avoir entre les contractions transversales dans les sens oy et oz et la dilatation longitudinale de la fibre pour que les faces latérales n'éprouvent ni pression ni traction normale. Puis décrivons, sur un plan, un arc de cercle $o_1 y_1$ avec un rayon $o_1 C = \frac{\rho}{\varepsilon}$, et des arcs concentriques c_1, c_1, c_1,... dont les petites distances consécutives $o_1 c_1$, $c_1 c_1$... soient égales aux côtés primitifs oc, cc, cc... des éléments réduits dans la proportion de ε' par suite des dilatations longitudinales de ceux-ci, ou multipliés par $1 - \varepsilon' \frac{z_1}{\rho}$. Si nous tirons, par le centre C, des rayons aux points de division de l'arc $o_1 y_1$ en parties $o_1 b_1$, $b_1 b_1$,..., égales aux côtés ob, bb,..., des bases des mêmes éléments dans l'autre sens, nous aurons partagé le plan en quadrilatères mixtilignes pouvant être regardés comme rectilignes vu leur petitesse, et dont l'un quelconque ayant son centre m_1 à la distance $m_1 p_1$ de l'arc $o_1 y_1$, aura dans le sens des arcs une largeur qui sera à la largeur primitive $bb = b_1 b_1$ de l'élément correspondant comme $\frac{\rho}{\varepsilon} - m_1 p_1$ est à $\frac{\rho}{\varepsilon}$, ou comme $1 - \varepsilon \frac{m_1 p_1}{\rho}$ est à 1.



D'où il suit qu'en prenant $z_1 = m_1 p_1$, les petits quadrilatères mixtilignes, comparés aux rectangles en même nombre qui servaient de bases aux éléments ou aux fibres, remplissent bien la condition voulue d'avoir précisément les dimensions que les déplacements doivent faire prendre à ceux-ci pour que les faces latérales ne supportent pas de

pressions normales, et, aussi, la forme nécessaire pour qu'elles n'éprouvent pas d'actions tangentielles transversales, puisque leurs angles sont restés droits. Et la possibilité énoncée de la transformation des uns dans les autres sans faire cesser leur contiguïté, se trouve en conséquence démontrée.

La construction qui fait voir cette possibilité s'opérerait aussi facilement si les dilatations étaient représentées par $\delta_0 + \frac{z_1}{\rho}$ au lieu de $\frac{z_1}{\rho}$: ou si les fibres coupant oy n'étaient pas de longueur invariable : on n'aurait qu'à prendre le centre C des arcs à une distance $\frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{1 - \varepsilon\delta_0}{1 + \delta_0}$ au lieu de $\frac{\rho}{\varepsilon}$, et les points de division b_1, b_1,..., du premier arc à des distances égales aux distances primitives ob, bb, bb,..., multipliées par $1 - \varepsilon\delta_0$.

Ou bien, après avoir tracé la figure comme si l'on avait la constante $\delta_0 = 0$, on contracterait tous les petits rectangles mixtilignes dans une proportion $\varepsilon\delta_0$ suivant les arcs, et $\varepsilon'\delta_0$ suivant les rayons, ce qui ne les empêcherait pas de rester contigus.

Si la dilatation variait linéairement dans les deux sens oz et oy à la fois, ou si elle était représentée par $\delta_0 + \frac{z_1}{\rho} + \frac{y_1}{\rho'}$, y_1 étant ce que devient la distance y de m à oz, on pourrait faire la construction d'abord comme si elle se réduisait à $\delta_0 + \frac{z}{\rho}$, puis comme si elle se réduisait à $\frac{y_1}{\rho'}$, et définitivement en composant géométriquement ensemble les déplacements transversaux trouvés dans ces deux hypothèses, ce qui donnerait, comme il est facile de le voir, un réseau de quadrilatères curvilignes dans les deux sens, et toujours orthogonaux, satisfaisant ainsi aux conditions voulues.

Mais on peut, en négligeant les différences de $\frac{z_1}{\rho}$ à $\frac{z}{\rho}$, de $\frac{y_1}{\rho'}$ à $\frac{y}{\rho'}$, et les autres quantités très-petites du second ordre [*], construire le réseau

---

[*] Comme dz_1 est $= dz\left(1 - \varepsilon'\frac{z_1}{\rho}\right)$ lorsque la dilatation ne varie que dans le sens

d'une autre manière qui a l'avantage de s'appliquer également au cas général, supposé le cas ordinaire comme nous avons dit, *où la matière du prisme n'a pour plans de symétrie que les sections transversales*, et où, par suite, la nullité des actions mutuelles transversales des fibres exige que les côtés de leurs bases rectangulaires non-seulement se contractent, mais encore généralement s'inclinent légèrement l'un sur l'autre de quantités proportionnelles aux dilatations longitudinales [*]. Alors, comme les proportions des contractions des côtés sont $\frac{dy_1 - dy}{dy}$ et $\frac{dz_1 - dz}{dz}$, et comme $\frac{dy_1}{dz} + \frac{dz_1}{dy}$ est la petite inclinaison qu'ils ont prise l'un sur l'autre, ou le resserrement de deux des angles opposés des éléments superficiels, on devra avoir, $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'}$ étant la dilatation longitudinale, et ε'' un nouveau nombre constant

$$(14) \quad dy_1 = dy\left[1 - \varepsilon\left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'}\right)\right],\quad dz_1 = dz\left[1 - \varepsilon'\left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'}\right)\right],\quad \frac{dy_1}{dz} + \frac{dz_1}{dy} = \varepsilon''\left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'}\right).$$

Si l'on intègre les deux premières de ces équations, il faut ajouter respectivement des fonctions arbitraires $f(z)$ et $f(y)$ à leurs intégrales; et, en substituant dans la troisième équation, elle devient

$$f'(z) - \varepsilon'\frac{z}{\rho'} - \varepsilon''\frac{z}{\rho} = -f'(y) + \varepsilon\frac{y}{\rho} + \varepsilon''\frac{y}{\rho'} + \varepsilon''\vartheta_0.$$

Elle est satisfaite en faisant les deux membres égaux à une même

---

z, on obtient, en intégrant, $\frac{z_1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon'}\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon' z}{\rho}}\right) = \frac{z}{\rho} - \frac{\varepsilon'}{2}\frac{z^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon'^2}{6}\frac{z^3}{\rho^3} - \ldots$ qui est bien réductible à $\frac{z}{\rho}$ en négligeant $\frac{z^2}{\rho^2}$, très-petit du second ordre.

[*] Ce cas de contexture à un seul plan de symétrie est plus étendu que celui que nous avons traité analytiquement à partir de la fin de l'art. **16**. C'est celui des formules (7) de l'art. **9**. La nullité des actions transversales p_{yy}, p_{zz} et p_{yz} sur les faces latérales ou parallèles aux x, exige bien, d'après ces formules comme d'après un raisonnement facile, que ϑ_y, ϑ_z et le resserrement d'angle g_{yz} ou la petite inclinaison mutuelle des côtés des bases des éléments soient dans des rapports constants avec ϑ_x, quelles que soient les inclinaisons g_{xy}, g_{xz} des arêtes sur les bases, car celles-ci n'engendrent sur les faces latérales que des pressions tangentielles p_{xy}, p_{xz}.

constante arbitraire ; et cette constante est égale à $\varepsilon''\vartheta_0$ si l'on suppose, pour abstraire les translations et les rotations générales, que le premier élément de la ligne oy est resté immobile ainsi que l'origine o, ou que l'on a $\frac{dz_1}{dy} = 0$ ainsi que $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$. Il en résulte, pour satisfaire aux trois équations différentielles (114) exprimant les conditions à remplir afin que les fibres ne se sollicitent pas transversalement,

$$(115)\quad \begin{cases} y_1 = \varepsilon''\vartheta_0 z + (1 - \varepsilon\vartheta_0)\, y + \dfrac{\varepsilon'' z^2 - 2\varepsilon' yz}{2\rho} + \dfrac{\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2}{2\rho'}, \\ z_1 = \qquad\qquad (1 - \varepsilon'\vartheta_0)\, z + \dfrac{\varepsilon'' y^2 - 2\varepsilon' yz}{2\rho'} - \dfrac{\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2}{2\rho}, \end{cases}$$

ce qui prouve que ces conditions sont très-compatibles entre elles, et ce qui donne les positions des points du nouveau réseau formé par les bases des éléments, ou les deux systèmes de lignes qui les limitent. Ainsi la seconde de ces expressions (115), en attribuant à z diverses valeurs constantes, donne les équations des lignes légèrement courbes dans lesquelles se sont changées les droites tracées primitivement sur la section ω parallèlement aux y : ce sont des paraboles dont le rayon de courbure est sensiblement constant et égal à l'inverse de $\frac{d^2 z_1}{dy^2} = \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon''}{\rho'}$, et qui se confondent ainsi à très-peu près, lorsque $\frac{1}{\rho'} = 0$, avec les arcs de cercle trouvés ci-dessus, dont les rayons pouvaient etre regardés comme égaux vu la grandeur supposée considérable de $\frac{\rho}{\varepsilon}$ par rapport à z ou z_1. La première expression (115) donne de même pour les lignes de division qui étaient primitivement parallèles aux z, des paraboles ou des arcs de cercle dont le rayon est l'inverse de $\frac{\varepsilon'}{\rho'} + \frac{\varepsilon''}{\rho}$, et qui se réduisent à des lignes droites comme ci-dessus lorsque $\varepsilon'' = 0$, ou que les angles des petits rectangles doivent rester droits, si, en même temps, on a $\frac{1}{\rho'} = 0$, ou variation de la dilatation longitudinale avec la coordonnée z seule.

Toutes les fois donc (conformément à ce que nous avons avancé) qu'on aura un prisme dont la contexture offre par rapport aux sections

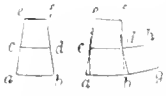
transversales une symétrie telle que le changement des dimensions de ses fibres ou éléments longitudinaux et l'altération des angles de leurs *bases* ne puissent engendrer sur celles-ci que des actions longitudinales, et sur les faces latérales que des actions parallèles à ces mêmes bases, si les dilatations longitudinales éprouvées par ces fibres ne varient que linéairement dans deux sens transversaux aux points où elles traversent une section quelconque, leurs bases pourront toujours prendre, sans cesser d'être contiguës, des formes telles que les fibres n'exercent les unes sur les autres latéralement aucune action perpendiculaire à leurs longueurs [*].

Ce lemme va nous conduire facilement à la démonstration cherchée des formules connues de la flexion pour les cas où elles sont rigoureuses.

---

[*] On peut voir que, réciproquement, l'action latérale des fibres ne peut être nulle dans le sens transversal qu'autant que leur dilatation longitudinale varie uniformément de l'une à l'autre avec la distance mutuelle mesurée au moins dans deux sens transversaux.

En effet, supposons d'abord la contexture symétrique par rapport à chacun des trois systèmes de plans de séparation des éléments. Leurs angles devront rester droits pour que les actions en question soient nulles. Or soient, après les déplacements sur une même section ω, $abdc$, $cdfe$ les bases de deux fibres contiguës : si les côtés ac et ce, bd et df ont des longueurs égales et s'ils sont restés rectilignes, il faut, pour que leurs angles soient encore droits après la courbure que peuvent avoir prise les autres côtés, qu'il y ait la même différence de longueur entre ceux opposés ab et cd de la première base qu'entre ceux cd, ef de la seconde. La même equidifférence doit exister si ace, bdf sont devenus aussi legèrement courbes tout en conservant la perpendicularité à ab, cd, ef, car on peut les remplacer par les lignes ponctuées qui leur sont tangentes aux milieux c, d, sans changer la longueur des côtés perpendiculaires ab, fe que de quantités d'ordre négligeable. Et il doit y avoir équidifférence aussi dans l'autre sens, c'est-à-dire entre les côtés ac, bd, gh de la base $abdc$ et de celle $dbgh$ d'une troisième fibre contiguë à la première si l'on suppose $ab = bg$, $cd = dh$.



Comme les lignes maintenant équidifférentes étaient primitivement égales, on voit que les contractions subies par les côtés des bases des fibres doivent varier linéairement ou uniformément avec les distances de celles-ci, dans chacun des deux sens de division, pour qu'elles n'exercent les unes sur les autres par leurs faces latérales aucune action tangentielle transversale.

Or, pour qu'elles n'exercent par les mêmes faces non plus aucune action normale, il

Commençons en effet par le cas le plus simple, celui de la flexion *égale* ou *circulaire*, où les déplacements longitudinaux sont supposés tels que les sections transversales restent toutes planes et normales aux fibres également dilatées ou contractées d'un bout à l'autre et changées en arcs de cercle dont les centres se trouvent sur une même droite, intersection commune des plans nouveaux des sections; en sorte que si ϑ_0 est la dilatation de la fibre qui passe par les centres de gravité des sections, ρ son rayon ou sa distance à l'intersection dont nous parlons, et $\rho + z$ le rayon d'une autre fibre quelconque, on a $(1+\vartheta_0)\frac{\rho+z}{\rho}$ pour la longueur nouvelle d'une portion de cette fibre égale primitivement à l'unité, et par conséquent

$$\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$$

pour sa dilatation longitudinale $\left(\text{vu que } \vartheta_0 \text{ et } \frac{z}{\rho} \text{ sont supposés très-petits et leur produit négligeable}\right)$. Et supposons les déplacements transversaux relatifs tels, sur toutes les sections ω, que les fibres n'exercent les unes sur les autres latéralement aucune action transversale, ce que nous venons de démontrer possible quand les dilatations longitudinales ont une pareille expression. En désignant par E le nombre que

---

faut, comme nous avons vu ci-dessus pour une pareille contexture, qu'il y ait un certain rapport constant entre les dilatations longitudinales des fibres et les contractions latérales dans les deux mêmes sens.

Donc, pour que les fibres d'un pareil prisme ne se sollicitent pas perpendiculairement à leur longueur, il est *nécessaire* que leurs dilatations longitudinales varient uniformément de l'une à l'autre dans les deux sens transversaux parallèles aux intersections des plans de symétrie de contexture.

En passant au cas plus général où il n'y a de plan de symétrie que perpendiculairement aux arêtes du prisme, on verra facilement que les trois équations différentielles (114) ne peuvent être d'accord entre elles, ou satisfaites par les mêmes valeurs de y_1 et z_1 en y et z si l'on ajoute des termes affectés des secondes puissances ou des puissances supérieures de y ou z aux trinômes entre parenthèses $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'}$ exprimant les dilatations longitudinales. On ne peut y ajouter qu'un terme en yz, n'empêchant pas la dilatation de varier uniformément dans le sens de chacune des coordonnées y, z. Donc, etc.

nous avons tout à l'heure appelé coefficient d'élasticité d'extension, les actions toutes longitudinales exercées sur les éléments $d\omega$ des sections seront exprimées par

$$E d\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}\right).$$

Les actions sur les deux bases extrêmes auront la même expression et les actions sur les faces latérales du prisme seront nulles.

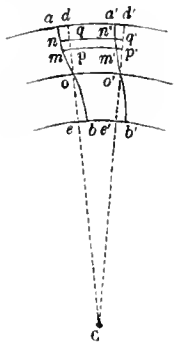
Réciproquement, comme le problème des petits déplacements relatifs des points d'un corps élastique est complétement déterminé lorsqu'on donne les forces extérieures qui y agissent, *Un prisme dont les faces latérales ne supportent aucune action et dont les bases extrêmes sont sollicitées par des tractions longitudinales* $E d\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}\right)$, *c'est-à-dire des tractions (positives ou négatives) égales sur toutes deux aux points homologues, normales aux éléments* $d\omega$ *où elles s'exercent, et variant linéairement avec une même coordonnée transversale* z, *éprouvera* précisément les déplacements tant longitudinaux que transversaux que nous venons de supposer, c'est-à-dire *une incurvation en arc de cercle dans un plan parallèle aux arêtes et à* z, *avec des dilatations longitudinales* $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$ *partout, et, aussi partout dans l'intérieur, les mêmes tractions longitudinales* $E d\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}\right)$ *que si ces fibres étaient isolées.* En sorte que les formules de la théorie ordinaire de la flexion s'y observeront exactement.

De plus, ses fibres éprouveront des contractions transversales $\varepsilon\left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}\right)$, $\varepsilon'\left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}\right)$ dans un sens perpendiculaire et dans un sens parallèle à z, en sorte que le contour de ses sections prendra le léger changement de forme qu'assigne la construction ci-dessus (et que l'on peut observer expérimentalement en fléchissant un parallélipipède de caoutchouc).

Passons maintenant à un cas plus compliqué et bien plus habituel, celui de la flexion en arc non circulaire dont l'inégalité de courbure

d'un bout à l'autre du prisme est déterminée par des forces agissant transversalement ou tangentiellement aux sections.

En raisonnant comme tout à l'heure d'une manière d'abord inverse, nous ferons des hypothèses sur les déplacements en nous les donnant tels : 1° que les diverses sections ω se soient toutes infléchies et inclinées de la même manière sur les fibres, de sorte que les portions $mm'n'n$ de celles-ci comprises entre deux sections très-voisines aob, $a'o'b'$ aient après la flexion la même longueur que les portions $pp'q'q$ comprises entre deux plans doe, $d'o'e'$ menés normalement à la fibre centrale oo' par les centres de gravité o, o' des sections, et que les dilatations longitudinales puissent ainsi être toujours exprimées par $\delta_0 + \frac{z}{\rho}$, δ_0 étant la dilatation de la fibre oo', ρ son rayon de courbure oC, et z la distance d'une fibre quelconque à la droite o menée par le centre de la section, parallèlement à l'intersection C des deux plans normaux ; 2° que les fibres se contractent latéralement (ainsi qu'on l'a démontré possible toutes les fois que leur dilatation a une expression linéaire) de manière qu'elles ne se pressent pas l'une l'autre perpendiculairement à leur longueur, et que par conséquent la traction longitudinale sur l'élément $d\omega$ soit $\mathrm{E}d\omega\left(\delta_0 + \frac{z}{\rho}\right)$: ce qui n'empêche pas les mêmes fibres de pouvoir exercer les unes sur les autres des actions longitudinales analogues à des frottements sur leurs diverses faces latérales telles que mm', nn', etc., en vertu de leurs petits *glissements* les unes devant les autres ou des inclinaisons qu'ont prises leurs arêtes sur leurs bases $d\omega = mn$ ou $m'n'$; 3° que δ_0 soit constant, en sorte que les diverses sections ω déjà sollicitées toutes tangentiellement par les mêmes forces transversales qui dépendent de ces inclinaisons, et dont nous appelons P la résultante constante supposée parallèle à oC ou aux z, soient aussi sollicitées toutes par des forces longitudinales ayant la même somme $\mathrm{E}\omega\delta_0$; mais que l'on ait la courbure $\frac{1}{\rho}$ variable uniformément d'un bout à l'autre, et égale à $\frac{\mathrm{P}(a-x)}{\mathrm{EI}}$, I exprimant le moment d'inertie $\int z^2 d\omega$ de la section ω autour de la



ligne o, et $\mathrm{P}\,(a-x)$ le moment variable autour de la même ligne o, des forces extérieures qui agissent à l'extrémité du prisme; en sorte que ces forces sont tenues en équilibre de rotation par les tractions $\mathrm{E}d\omega\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right)$ sur une même section, vu que le moment total de celles-ci est $\frac{\mathrm{E}}{\rho}\int z^2 d\omega$; 4° enfin que, d'apres la forme courbe *aob* prise par toutes les sections, les actions tangentielles longitudinales soient nulles sur les faces latérales *extérieures* du prisme, et que, sur les faces *mm'*, *nn'*, etc., d'un élément quelconque de fibre, les différences qu'offrent ces actions tangentielles en vertu de ce que les inclinaisons des arêtes sur les bases ne sont pas les mêmes en *m* qu'en *n*, en *m'* qu'en *n'*, etc., se trouvent justement équilibrées par la différence due à la variation de $\frac{1}{\rho}$, des actions aussi longitudinales $\mathrm{E}d\omega\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right)$ qui s'exercent en sens opposé sur les deux bases *mn*, *m'n'* du même élément.

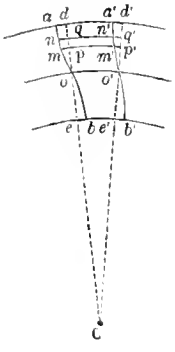
La compatibilité des trois premières de ces suppositions faites sur les déplacements est évidente d'elle-même; et comme elles assurent l'équilibre soit de translation, soit de rotation générale, de toute tranche comprise entre deux sections ω, elles se concilient aussi avec la quatrième dont l'accomplissement se réduit à choisir, parmi l'infinité des formes attribuables à la surface courbe des sections infléchies, celle qui produit l'équilibre *de détail*, ou de chaque élément de la tranche en particulier; forme qui doit toujours exister, bien qu'on ne puisse l'assigner pour chaque cas qu'à la suite d'une analyse plus ou moins compliquée, dont nous avons donné ci-dessus divers exemples [*].

---

[*] On peut déterminer cette forme immédiatement dans un cas simple, le cas où les sections supposées rectangulaires seraient assez étroites dans un sens perpendiculaire au plan de flexion $o\mathrm{C}o'$ pour que les coupes *aob* de leur surface courbe pussent être regardées comme les mêmes par tout plan parallèle à $o\mathrm{C}o'$.

En effet, — u' étant la perpendiculaire abaissée de *m* sur le plan *doe* perpendiculaire lui-même à la tangente à la fibre centrale en *o*, $\frac{du'}{dz}$ est l'inclinaison de cette tangente sur la section au point *m*; mais la fibre ou ligne matérielle *mm'* primitivement parallèle à la fibre centrale, a sur elle maintenant une légère inclinaison due à ce que les contractions dans le sens *z* ont été $\varepsilon'\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right)$ sur la section *aob*, et

Les déplacements des points du prisme étant tels qu'on vient de les supposer, ses faces latérales n'éprouveront aucune action, et ses deux bases



$\varepsilon'\left[\vartheta_0+z\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}\cdot mm'\right)\right]$ sur celle $a'o'b'$, ce qui a rapproché le point m' plus que le point m de la fibre centrale oo', de $\varepsilon'\,\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}\cdot mm'.\int_0^z z\,dz$, et donne ainsi en divisant par mm' et intégrant, $-\frac{\varepsilon' z^2}{2}\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}$ pour l'inclinaison de mm' sur cette fibre centrale; ce qui fait au total $\frac{du'}{dz}-\frac{\varepsilon' z^2}{2}\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}$ pour l'inclinaison prise par la fibre mm' sur la section ω à laquelle elle était primitivement perpendiculaire.

Appelant G′ le coefficient par lequel il faut multiplier cette inclinaison ou ce *glissement* pour avoir, par unité superficielle, la résistance qu'il développe, et $2b$ la petite largeur de la section dont $2c$ représente la hauteur doe, on a pour l'équilibre de translation longitudinale d'une tranche $mm'n'n$ de cette largeur $2b$,

$$G'.\,2\,bdx\,\frac{d}{dz}\left(\frac{du'}{dz}-\frac{\varepsilon' z^2}{2}\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}\right)dz=-2\,bdz\,\frac{d.E\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right)}{dx}\,dx;$$

ou, comme $\frac{EI}{\rho}=P(a-x)$, $\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}=-\frac{P}{EI}=-\frac{3P}{E\omega c^2}$:

$$G'\,\frac{d}{dz}\left(\frac{du'}{dz}+\frac{\varepsilon' z^2}{2}\,\frac{3P}{E\omega c^2}\right)=\frac{3Pz}{\omega c^2};$$

d'où, intégrant de manière que, pour $z=c$, l'inclinaison $\frac{du'}{dz}+\frac{\varepsilon' z^2}{2}\,\frac{3P}{E\omega c^2}$ de la fibre sur la section soit nulle :

$$G'\left(\frac{du'}{dz}+\frac{\varepsilon' z^2}{2}\,\frac{3P}{E\omega c^2}\right)=\frac{3P(z^2-c^2)}{2\omega c^2};$$

ou, intégrant de nouveau de manière que $u'=0$ pour $z=0$,

$$u'=-\frac{3Pc}{2G'\omega}\left[\frac{z}{c}-\left(1-\frac{\varepsilon' G'}{E}\right)\frac{z^3}{3c^3}\right],$$

comme nous avons déjà trouvé art. 29, expression (112).

Cet exemple suffirait pour convaincre, s'il en était besoin, que le problème de la forme courbe des sections n'impose pas, quel que soit le contour, plus de conditions qu'on n'en peut remplir, et qu'il a par conséquent toujours une solution.

extrêmes seront sollicitées par des forces longitudinales $\mathrm{E}\,d\omega\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right)$ et par des forces tangentielles ou transversales qui dépendent de la forme nouvelle des surfaces des sections primitivement planes.

Réciproquement, comme les déplacements relatifs sont produits d'une manière unique par des forces extérieures données, *Un prisme dont les faces latérales ne sont soumises à aucune action et dont les deux bases extrêmes supportent à la fois,* 1° *dans le sens longitudinal, des tractions (positives ou négatives) qui varient linéairement ou qui sont exprimables par* $\mathrm{E}\,d\omega\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho_1}\right)$, $\mathrm{E}\,d\omega\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho_2}\right)$, *la constante* ϑ_0 *ayant une même valeur sur les deux bases, mais celles* $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ *ayant généralement des valeurs différentes dont l'une des deux peut être nulle, et la coordonnée transversale* z *étant, du reste, comptée et dirigée de la même manière sur l'une et sur l'autre;* 2° *dans un sens transversal ou tangentiel, des actions qui ont mêmes grandeurs et directions aux points homologues de ces deux bases dont nous appelons a la distance, et une résultante* P *ayant avec le quotient* $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)$ *un rapport déterminé qui dépend de la forme et de la grandeur des sections* [*], *ainsi que le mode de distribution des mêmes actions; ce prisme, dis-je, prendra dans toutes ses parties des dilatations longitudinales* $\vartheta_0+\frac{z}{\rho}$, $\frac{1}{\rho}$ *variant uniformément le long de l'axe entre ses valeurs extrêmes* $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$: *les éléments* $d\omega$ *de chaque section intérieure supporteront des actions*

---

[*] Ce rapport est $\mathrm{E}\int z^2\,d\omega$, ou plus généralement $\mathrm{E}\sqrt{\left(\int z^2\,d\omega\right)^2+\left(\int yz\,d\omega\right)^2}$, car $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)$ n'est autre chose que ce que nous désignions dans la note précédente par $\frac{1}{dx}\,d\frac{1}{\rho}$: et, P_z et P_y étant les composantes de P dans le sens z et dans le sens d'une autre coordonnée y perpendiculaire à z, enfin $a-x$ la distance de ω à la seconde extrémité du prisme, l'équilibre de rotation autour des lignes z, y passant par o, s'exprime par $-\mathrm{P}_z(a-x)=\int \mathrm{E}\,d\omega\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right)z$, $-\mathrm{P}_y(a-x)=\int \mathrm{E}\,d\omega\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right)y$, d'où $\mathrm{P}_z=\mathrm{E}\int z^2\,d\omega\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{\rho}$, $\mathrm{P}_y=\mathrm{E}\int yz\,d\omega\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{\rho}$.

normales ou longitudinales $\mathrm{E}d\omega\left(\vartheta_0+\frac{z}{\rho}\right)$, *et précisément les mêmes actions tangentielles que chacune des deux bases extrêmes ;* actions dont la résultante P doit produire, avec un bras de levier égal à la distance de chaque base à une section quelconque, un moment capable de contre-balancer justement celui des actions longitudinales autour du même axe tracé sur cette section par son centre.

En sorte que, *pour un pareil mode de sollicitation*, on aura *exactement* les formules connues de la théorie ordinaire de la flexion des prismes, accompagnée d'extension de la fibre centrale; formules ne donnant jamais, au reste, comme nous avons dit, que la partie des déplacements due aux dilatations longitudinales des fibres, et auxquelles il faut joindre, pour avoir les autres parties et en tirer les conditions complètes de résistance, les formules un peu plus compliquées et que l'analyse seule peut fournir, qui donnent les déplacements dus aux petits glissements des tranches ou des fibres l'une devant l'autre; déplacements le plus souvent négligeables, mais qui dans quelques cas augmentent sensiblement la *flèche* de flexion, ainsi que la dilatation maximum, alors de sens oblique, qu'il convient de limiter pour prévenir les ruptures.

32. *Conclusion. Observation générale pour le cas où le mode d'application et de distribution des forces extérieures vers les extremités est différent de celui qui rend tout à fait exactes les formules auxquelles conduit la méthode mixte.*

Ainsi que nous avons dit art. **3**, si le mode de sollicitation est différent, ou si des forces ayant à chaque extrémité même résultante géométrique et même moment résultant que celles dont nous venons de parler, y sont appliquées et distribuées d'une autre manière, les résultats ci-dessus pourront être toujours employés comme représentant très-approximativement l'état du prisme, supposé n'éprouver dans l'intervalle aucune action extérieure.

En effet, si, sur deux sections quelconques de ce prisme, extrêmes ou non, la distribution des forces a lieu comme on a dit, l'analyse précédente prouve *qu'elle aura lieu, par cela seul, de la même manière sur toutes les sections intermédiaires*. L'état que ces formules dé-

terminent est ainsi pour les diverses sections considérées à partir de chaque extrémité, ce qu'est l'état *permanent* d'un écoulement d'eau, ou l'état de *règlement* du mouvement d'une machine, etc., pour les divers instants considérés à partir de l'état initial : c'est un état limite qui se continue de lui-même une fois qu'il est atteint quelque part, et vers lequel converge jusque-là l'état réel du prisme fléchi, quel que soit le mode d'application de forces données vers les extrémités, à mesure que l'on considère des sections moins proches de celles-ci, car ici le *règlement* s'opère par l'espace et non par le temps.

C'est une remarque que nous avons eu l'occasion de faire ailleurs pour les divers cas de torsion et même pour celui d'extension d'un prisme par des forces qui le tirent aux deux bouts, cas dont la formule très-simple et admise par tout le monde sans difficulté est cependant subordonnée, pour être exacte, aussi à la condition d'une distribution déterminée des forces de traction.

La *convergence* est-elle prompte, ou l'état-limite de distribution intérieure qui tend à s'opérer s'opère-t-il en effet sensiblement à de très-petites distances? C'est ce que l'analyse ne peut encore révéler (art. 3), mais ce dont plusieurs faits d'expérience ne permettent pas de douter. Que, par exemple, on pince avec des tenailles un prisme en caoutchouc, on verra que l'impression produite s'étend à peine de part et d'autre à une distance égale à sa plus grande profondeur : elle paraît absolument nulle au delà. On observe quelque chose de semblable en étendant transversalement quelque part une lanière de cette même substance. En général, les déplacements produits dans les diverses parties d'un prisme par des forces qui se font équilibre par l'intermédiaire d'une de ses parties, deviennent tout à fait négligeables hors cette partie, à de très-petites distances des points où les forces s'exercent.

Or, quel que soit le système des forces qui agissent à chaque extrémité d'un prisme pour le fléchir, le tordre, l'allonger, etc., on peut toujours le remplacer par deux autres systèmes, l'un de forces ayant même résultante géométrique et même moment résultant que les forces données, mais appliquées et distribuées de manière à engendrer des déplacements exactement représentés par les formules; l'autre système se composant de forces ayant une résultante et un moment nuls, c'est-à-dire de forces se faisant équilibre sur une portion très-

courte du prisme, et pouvant être négligées comme nous venons de dire quant à leurs effets sur le reste de ce solide.

On peut donc regarder tout au moins pour la pratique les déplacements produits par des forces extérieures, appliquées et distribuées d'une manière quelconque vers les extrémités des prismes, comme représentées par les formules que l'on tire des équations différentielles de l'équilibre d'élasticité traitées par la méthode que nous appelons mixte, méthode qui fournit des valeurs rigoureuses dans un cas, et, dans tous les autres, des limites promptement atteintes hors des petites portions où les forces s'exercent, et que les constructeurs ont toujours soin de renforcer ou de garnir de fourrures.

En sorte que si l'on parvient un jour à déterminer analytiquement d'une manière complète l'état intérieur d'un prisme pour des forces agissant d'une manière quelconque vers leurs extrémités, tout porte à prévoir que les formules excessivement compliquées auxquelles on arrivera retomberont dans celles dont nous venons de parler lorsque, pour les rendre applicables, on les débarrassera des termes peu influents, causes de leur complication et expression des effets, rapidement évanouissants, de systèmes en équilibre ou n'apportant rien à la résultante ni au moment total qu'il suffit ainsi de considérer seuls pour chaque extrémité.

EXTENSION

D'UN

THÉORÈME DE CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. J. LIOUVILLE.

J'ai démontré ailleurs [*] que la considération de la première des fonctions

$$f_1 = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f, \quad f_2 = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} f, \ldots,$$

que l'on doit former pour développer en série suivant les puissances de x ou de $(x - a)$ l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

peut être quelquefois utile à un autre point de vue. En effet, si un paramètre α contenu dans f se trouve avoir disparu dans f_1, cela indiquera que

$$\frac{df}{d\alpha}(dy - f dx)$$

est une différentielle exacte, en sorte qu'on pourra alors écrire de suite l'intégrale

$$\int \frac{df}{d\alpha}(dy - f dx) = \text{constante}$$

de l'équation différentielle proposée.

Il y a un théorème analogue pour un système d'équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}, \quad \frac{dy}{dt} = \mathrm{Y}, \ldots, \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{Z},$$

quand X, Y,..., Z désignent des fonctions de t, x, y,..., z provenant d'une même fonction S par des dérivations partielles respectivement relatives à x, y,..., z, de manière que

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{S}}{dx}, \quad \mathrm{Y} = \frac{d\mathrm{S}}{dy}, \ldots, \quad \mathrm{Z} = \frac{d\mathrm{S}}{dz}.$$

[*] *Voir* le cahier de mai 1855, page 143.

Les premières fonctions qu'on ait à former ici pour développer x, $y,\ldots, z$ suivant les puissances de t ou de $(t-a)$ sont

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{dX}{dt} + \frac{dX}{dx}X + \frac{dX}{dy}Y + \ldots + \frac{dX}{dz}Z,\\
Y_1 &= \frac{dY}{dt} + \frac{dY}{dx}X + \frac{dY}{dy}Y + \ldots + \frac{dY}{dz}Z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_1 &= \frac{dZ}{dt} + \frac{dZ}{dx}X + \frac{dZ}{dy}Y + \ldots + \frac{dZ}{dz}Z.
\end{aligned}$$

Or s'il arrive qu'un paramètre α contenu dans une au moins des fonctions X, Y,..., Z ait disparu dans toutes les fonctions X_1, Y_1,..., Z_1, je dis qu'on trouvera aisément un système de facteurs P, Q,..., R rendant

$$P(dx - X\,dt) + Q(dy - Y\,dt) + \ldots + R(dz - Z\,dt)$$

une différentielle exacte $d\varphi(t, x, y,\ldots, z)$ et fournissant en conséquence une intégrale

$$\varphi(t, x, y,\ldots, z) = \text{constante}$$

du système d'équations différentielles posé plus haut. Il suffira de prendre

$$P = \frac{dX}{d\alpha} = \frac{d^2S}{dx\,d\alpha}, \quad Q = \frac{dY}{d\alpha} = \frac{d^2S}{dy\,d\alpha},\ldots, \quad R = \frac{dZ}{d\alpha} = \frac{d^2S}{dz\,d\alpha}.$$

L'intégrale sera évidemment de la forme

$$\frac{dS}{d\alpha} = \text{fonct.}(t, \alpha) + C.$$

Ce théorème est surtout curieux à cause de l'usage nouveau et singulier qu'il montre qu'on peut faire des fonctions X_1, Y_1,..., Z_1, dont le calcul est indiqué pour un tout autre objet dans les traités élémentaires. Je n'ôterai rien de l'intérêt que cette circonstance lui donne en ajoutant que l'on pourra aisément, si l'on veut, le rattacher à des théorèmes connus, bien qu'il m'ait été fourni d'abord par une méthode directe fort simple. La vérification *à posteriori* est du reste si facile, que je supprime pour le moment toute autre démonstration.

En premier lieu, il est clair que, pour les valeurs de P, Q,..., R

données plus haut, les conditions d'intégrabilité de la formule

$$P(dx - X\,dt) + Q(dy - Y\,dt) + \ldots + R(dz - Z\,dt)$$

sont remplies d'elles-mêmes quant à ce qui concerne les coefficients des différentielles dx, dy,..., dz comparés entre eux. Restent les conditions qui naissent de la comparaison de ces coefficients avec celui de dt; or elles peuvent aisément s'écrire ainsi :

$$\frac{dX_1}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dY_1}{d\alpha} = 0, \ldots, \quad \frac{dZ_1}{d\alpha} = 0,$$

et par conséquent elles reviennent à dire avec nous que α ne doit plus entrer dans les fonctions X_1, Y_1,..., Z_1.

On comprendra la liaison de notre théorème avec les belles recherches de Jacobi sur la mécanique, en observant que les équations

$$\frac{dX_1}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dY_1}{d\alpha} = 0, \ldots, \quad \frac{dZ_1}{d\alpha} = 0$$

peuvent être remplacées par une condition unique, à savoir que la quantité

$$T = \frac{d^2S}{dt\,d\alpha} + \frac{d^2S}{dx\,d\alpha}\frac{dS}{dx} + \ldots + \frac{d^2S}{dz\,d\alpha}\frac{dS}{dz} = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dz}\right)^2\right]$$

ne contienne plus x, y,..., z, et se réduise à une simple fonction de t et de α.

Remarquons, en passant, que si les équations dont nous parlons, sans avoir lieu en général, étaient vérifiées par une valeur particulière de α, ou, ce qui revient au même, si T contenant en général $x, y, \ldots$, z et t se réduisait pour $\alpha = \alpha_1$ à une simple fonction de t, notre théorème subsisterait pour cette valeur particulière.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que si d'autres constantes β, γ,..., distinctes de α, disparaissent avec α dans le passage de X, Y,..., Z à X_1, Y_1,..., Z_1, cette circonstance fournira de nouvelles intégrales, et même quelquefois toutes les intégrales qu'on a à chercher. Mais il est bon d'observer qu'on peut tirer le même parti du cas où une des variables t, x, y,..., z vient à manquer dans X_1, Y_1,..., Z_1. Si, par exemple, y disparaît dans ces fonctions, vous remplacerez dans l'expression des facteurs P, Q...., R la dérivation relative à α par une dérivation suivant y.

LES

PORISMES D'EUCLIDE,

PAR M. CH. HOUSEL.

Outre ses *Eléments*, Euclide avait composé plusieurs traités, dont la plupart ne nous sont point parvenus. Le plus célèbre de tous, quoiqu'il soit perdu, et peut-être même à cause de cela, portait le titre de *Porismes*. Il nous est connu seulement par l'analyse que Pappus en a faite et par quelques mots de Proclus.

Plusieurs illustres géomètres ont émis à ce sujet des opinions très-diverses, et, par conséquent, douteuses; aussi n'aurions-nous jamais eu le courage de traiter une question aussi difficile, si nous n'avions eu entre les mains une publication récente de M. Breton de Champ, où l'auteur, ne se contentant pas des commentaires et des traductions latines, traduit lui-même le passage de Pappus, dont il cite même le texte dans les endroits obscurs.

Dans ce travail, d'une érudition si remarquable, l'auteur semble hésiter à poser des conclusions; nous aurions mieux fait peut-être d'imiter cette sage réserve, mais, avant d'exposer nos idées, nous devons faire voir en quoi consistent les difficultés de la question.

La première est dans le titre lui-même. On voit que *Porisme* est un mot grec, non pas traduit, mais francisé, ce qui prouve qu'on ne l'a pas bien compris. Nous allons donc remonter jusqu'à son étymologie, ce qui ne suffira pas sans doute pour l'expliquer complétement, mais il faut toujours commencer par là.

On trouve facilement pour racine le mot πόρος, qui signifie *passage*, comme l'indique le mot français *pore*, lequel est venu directement du grec sans l'intermédiaire du latin. De là vient πορίζειν, que l'on traduit quelquefois par *porismer*, mais qui, en général, veut dire *frayer un passage*, et, par conséquent, *découvrir*. Enfin le mot πόρισμα, en

langage ordinaire, veut dire toute chose qu'on apporte, et, par suite, un gain. C'est dans ce sens, ainsi que l'explique Proclus, que ce mot, employé comme terme de géométrie, veut souvent dire une proposition qui s'ajoute à celle que l'on a démontrée, et, par conséquent, un corollaire; mais il a eu soin de prévenir que les *Porismes* d'Euclide ont un sens plus étendu; en effet, on ne concevrait pas un recueil de corollaires.

Mais en langage ordinaire, πορισμα veut dire encore *provisions* (que l'on apporte), et M. Terquem nous a dit avoir trouvé, dans Xénophon, ce mot signifiant *magasin* (pour les armées). De là ce savant conclut pour le traité d'Euclide une explication très-simple, qui consiste à y voir, non pas un ordre déterminé de questions, mais seulement un *magasin* ou un *recueil de propositions géométriques*. Cependant il ne faudrait pas exagérer cette idée en pensant que toutes les propositions de ce traité fussent isolées et décousues; M. Terquem lui-même admet qu'un certain nombre d'entre elles se rapportait à la théorie des transversales.

Avant d'aller plus loin, on pourrait s'étonner de voir que l'analyse de Pappus ait laissé tant d'incertitude sur la nature des propositions et sur l'esprit même de l'ouvrage, on pourrait surtout demander comment il se fait que l'on cherche encore le sens du mot *porisme* qui sert de titre. Cependant Pappus cherche à le définir; il expose, comme nous le verrons bientôt, les idées que les anciens et les modernes ont eues à ce sujet, mais ce qu'il en dit est assez obscur, et l'on est presque tenté de croire que lui-même ne comprenait pas bien clairement quelle avait été la pensée générale d'Euclide.

Nous ne parlons ici que de l'ensemble, car il est bien évident que Pappus était plus capable que personne de comprendre Euclide; mais il faut observer que ces deux illustres géomètres étaient séparés par un intervalle de six siècles, et que le sens d'un mot peut s'altérer dans un si long espace de temps. Euclide n'avait sans doute pas défini le *porisme* parce que tous les savants de son époque savaient ce qu'il voulait dire, mais ce mot n'étant pas de nature à s'expliquer par lui-même, comme par exemple le titre d'un traité sur les *contacts*, les contemporains de Pappus étaient divisés sur la signification des porismes, comme on l'est encore maintenant; à plus forte raison, il en était de même à l'époque de Proclus.

Aussi, pour trouver un sens aux définitions que ces deux géomètres donnent des porismes, nous jugeons nécessaire d'énoncer d'abord le porisme sur lequel ont porté spécialement les discussions des géomètres, car c'est à peu près le seul dont l'énoncé soit donné complétement par Pappus. Encore nous devons dire que cet énoncé n'avait pas été deviné avant Robert Simson.

Si, dans un système de quatre droites se coupant deux à deux en six points, les trois situés sur l'une d'elles sont donnés (ou les deux quand cette droite est parallèle à l'une des trois autres), et que deux des trois autres points soient assujettis à demeurer chacun sur une droite fixe, le dernier point demeurera pareillement sur une droite fixe qui passera par le point de concours des deux autres droites fixes.

La dernière partie, qui a rapport au point de concours des trois droites, n'est point énoncée par Pappus; nous croyons qu'elle est due à M. Chasles.

Sans donner ici la démonstration que Pappus indique seulement dans les lemmes qu'il joint à son analyse, nous remarquerons que la figure est facile à construire.

Soient A, B, C, D, E, F les six points en question, prenons pour points fixes les trois points F, A, D, et supposons, pour fixer les idées, que le point A soit situé entre F et D; par ce point A menons une droite quelconque qui coupe en B la droite fixe BH et en E l'autre droite fixe EH; enfin, joignons FB et ED qui se coupent en C. Si nous faisons la même construction avec une autre droite passant par le point A, ce qui donne les deux points B′, E′ et le troisième C′, les trois points C, C′ et H seront en ligne droite.

Il faut voir maintenant comment plusieurs illustres mathématiciens ont interprété les porismes, et leurs opinions nous faciliteront encore l'intelligence des définitions et des explications de Pappus.

Nous commencerons par Fermat, quoiqu'il soit antérieur à R. Simson, et par suite à la découverte de l'énoncé précédent, mais il est impossible de passer complétement sous silence l'opinion d'un homme aussi éminent. Il imagine plusieurs théorèmes qui valent peut-être mieux que ceux d'Euclide, mais cela ne prouve point que ce soient les mêmes. On remarque parmi les propositions de Fermat, le théorème de

Desargues sur l'involution des six points donnés par une transversale qui coupe un quadrilatère inscrit dans une conique. Du reste, il a la confiance d'avoir deviné, quoique avec peine, toute la pensée d'Euclide, et à cette occasion il s'enthousiasme au point de citer Virgile : *J'ai tâtonné longtemps dans les ténèbres,* s'écrie l'illustre Toulousain, *mais la vérité s'est présentée à moi :*

. . . Tandem se clara videndam
Obtulit, et purâ per noctem in luce refulsit [*].

Autant que nous pouvons juger de l'opinion de Fermat sur les porismes, elle se rapproche de celle de M. Chasles, que nous examinerons bientôt.

Cependant nous nous arrêterons sur les travaux de R. Simson, à l'occasion desquels nous jetterons un premier coup d'œil sur le texte et les définitions données par Pappus.

La principale gloire de R. Simson est d'avoir compris le porisme que nous avons énoncé précédemment. Puissamment secondé par ce premier succès, il s'attacha à compléter l'explication si ardemment désirée de cette grande énigme. Cependant il semble plutôt avoir deviné la forme sous laquelle Pappus présente les porismes, que le fond même de la pensée d'Euclide.

Nous allons citer le texte latin de R. Simson, qui demande à être commenté plutôt que traduit.

Porisma est propositio in quâ proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris non quidem datis, sed quæ ad ea quæ data sunt eamdem habent relationem, convenire ostendendum est affectionem quamdam communem in propositione descriptam.

Pour éclairer cette définition, il faut la comparer avec l'énoncé du porisme déjà connu et avec le texte de Pappus.

Dans les porismes, comme dans toutes les propositions de mathématiques ou autres, on distingue l'hypothèse (ἡ ὑποθέσις) et le résultat (τὸ ζητουμένον, c'est-à-dire la chose que l'on cherche) ; mais ici Pappus fait observer que l'hypothèse elle-même se subdivise en deux parties,

[*] *Enéide,* liv. II, v. 590.

dont la première est l'hypothèse proprement dite, et dont la seconde peut prendre le nom d'*accident* (τὸ συμβέβηκος).

On peut appliquer au porisme déjà cité ces différentes subdivisions, qui deviendront plus faciles à comprendre par cet exemple : elles paraissent un peu subtiles, ce qui est particulier au génie grec, mais elles sont justes au fond, comme on va le voir.

Des deux parties de l'hypothèse, la première contient les *conditions fixes* du porisme, et la seconde, *l'accident*, contient les *conditions de la variabilité*. Ainsi, dans l'exemple précédent, où l'on considère les six sommets d'un quadrilatère complet, l'*hypothèse* consiste en ce que trois de ces six points sont fixes ; l'*accident* exige que deux des autres points glissent sur deux droites données : tout cela constitue l'hypothèse complète ; enfin le *résultat* consiste en ce que, d'après ces conditions, le dernier point décrit une droite.

On peut croire que nous nous hâtons d'étendre à tous les porismes une disposition établie pour un seul, mais il faut remarquer que ce porisme de Pappus en résume dix d'Euclide, et que, d'après Pappus, la même subdivision s'applique à tous les porismes, même à ceux qu'il n'énonce que d'une manière très-incomplète.

D'après cela, voici l'idée qui s'est emparée de nous à la lecture du travail de M. Breton de Champ, et qui s'est fortifiée par la réflexion, mais que nous n'osons énoncer qu'avec une crainte bien naturelle, quand il s'agit de prononcer sur un sujet où tant d'illustres géomètres se sont déjà exercés.

Nous pensons que l'ouvrage d'Euclide roulait sur des questions assez cultivées aujourd'hui, mais moins répandues chez les anciens, où l'on considère certaines parties des figures, mobiles sur certaines autres parties fixes : pour en donner un autre exemple, en dehors de Pappus et d'Euclide, nous considérons comme un porisme la description organique des coniques par Newton, conçue ainsi qu'il suit :

Si deux angles donnés tournent autour de leurs sommets de manière que deux de leurs côtés se coupent sur une droite fixe, les deux autres côtés se couperont sur une conique.

Ici, l'*hypothèse* consiste dans la fixité des sommets et la grandeur constante des angles ; l'*accident* exige que deux côtés mobiles se cou-

pent sur une droite donnée; et enfin, le *résultat* établit que les deux autres côtés engendrent une conique.

On voit donc que nous rattachons la définition du porisme à l'idée du mouvement. Pour essayer de justifier cette opinion, nous ferons remarquer qu'elle s'accorde avec l'étymologie du mot *porisme*, puisque sa racine, πόρος, signifiant *passage*, entraîne l'idée de mobilité.

Ainsi, selon nous, le livre des Porismes pourrait s'intituler en français : *Traité des figures en mouvement.*

Il sera facile de constater, d'après le texte de Pappus, que tous les énoncés de porismes qu'il donne, même les plus incomplets, indiquent toujours, comme nous l'avons dit, quelque chose de mobile.

Mais avant d'exposer notre idée, nous aurions dû peut-être achever de résumer celles des géomètres qui ont discuté cette question; c'est ce que nous allons faire en prenant pour guide M. Breton de Champ; seulement nous en laisserons de côté quelques-unes auxquelles lui-même n'attribue qu'une importance secondaire.

Hoëne Wronski pensait que les porismes étaient des problèmes dont la solution était *nécessairement possible*, tandis que les problèmes ordinaires étaient ceux dont la solution était aussi possible, mais sans que cette possibilité fût évidente.

M. Poncelet croit que les porismes ont été découverts par Euclide au moyen des considérations de la perspective; il est vrai que les propriétés projectives peuvent y conduire, mais il n'est pas évident qu'elles aient été employées par Euclide.

M. Chasles adopte, quant à la forme des porismes, l'explication de Robert Simson, dont nous avons parlé précédemment, et sur laquelle nous reviendrons plus tard; mais il va plus loin et cherche quel but se proposait Euclide en composant cet ouvrage. Il pense que ce but était de faciliter les recherches des géomètres en leur montrant une série de questions dans lesquelles on obtenait pour lieux géométriques des droites, des cercles et peut-être même des coniques : de sorte que, si un mathématicien, cherchant un lieu géométrique, parvenait à le ramener à un de ceux dont Euclide indiquait l'espèce dans ses porismes, son travail se trouvait simplifié considérablement : de plus, la méthode employée par Euclide était encore utile pour diriger les recherches dans des cas non plus identiques, mais seulement analogues.

Nous adoptons volontiers l'opinion de M. Chasles, seulement il nous semble que cette méthode d'Euclide était la considération du mouvement.

Quoi qu'il en soit, on peut, d'après M. Chasles, comprendre le porisme comme le *passage d'un lieu à un autre*, ce qui s'accorde encore très-bien avec l'étymologie. Voici un exemple qui éclairera ce qui précède.

Si l'on cherche le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes soit constant, on le ramènera au lieu des points tels, que si on les joint à deux points fixes (différents des premiers), l'angle de ces nouvelles droites soit un angle droit : alors on voit que c'est un cercle.

Si l'on veut appliquer à cette proposition la subdivision de Pappus, on dira que l'*hypothèse* consiste dans la fixité des deux points et la constance du rapport, que l'*accident* suppose le point dont on cherche le lieu, placé à la rencontre des droites mobiles, et qu'enfin le *résultat* établit que ce lieu est une circonférence.

Ainsi M. Chasles pense que les porismes jouaient dans la géométrie ancienne un rôle analogue à celui des coordonnées de Descartes dans la géométrie moderne. On sait, en effet, que la transformation des coordonnées permet souvent de passer d'une certaine définition d'un lieu géométrique à une autre définition du même lieu, considéré sous un tout autre point de vue.

Après nous être ainsi préparé par l'examen des opinions de différents géomètres, il est temps d'aborder d'une manière plus étendue l'étude de Pappus lui-même, en commençant par observer à quelle occasion il s'est occupé des porismes.

Pappus nous apprend que cette considération est utile pour la recherche des lieux géométriques. Voici comment il s'exprime dans la préface de son septième livre des *Collections mathématiques*, qui est consacré au *lieu résolu* (τόπος αναλυόμενος).

« Ce qu'on appelle le *lieu résolu*, ô mon fils Hermodore, est,
» dans son ensemble, une matière à l'usage de ceux qui, après avoir
» étudié les éléments de la géométrie, veulent encore se mettre en état
» de résoudre les problèmes qui peuvent leur être proposés ; c'est là

» son utilité. Il se compose d'écrits dus à trois géomètres : Euclide, » l'auteur des *Éléments ;* Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien. On » y procède par voie d'analyse et de synthèse.

» Voici la liste de ces écrits dont se compose, comme nous l'avons » dit, le *lieu résolu ;* d'Euclide, un livre des *données ;* d'Apollonius, » deux livres de la *section de raison*, deux de la *section de l'espace*, » deux de la *section déterminée*, deux des *contacts ;* d'Euclide, trois » livres des *porismes ;* d'Apollonius, deux livres des *inclinaisons*, du » même, deux livres des *lieux plans*, huit des *coniques ;* d'Aristée, » cinq livres des *lieux solides ;* d'Euclide, deux livres des *lieux à la* » *surface ;* d'Eratosthènes, deux livres des *moyennes* : en tout, trente- » trois livres. »

On voit par là que les porismes servaient en effet à la recherche des lieux géométriques, mais que beaucoup d'autres considérations étaient utiles pour le même objet. On voit de plus que les Anciens avaient l'habitude de donner à leurs ouvrages, non pas de vagues dénominations, mais des titres particuliers, indiquant le sujet spécial de chacun d'eux. On peut donc croire que les porismes contenaient, comme les autres Traités cités par Pappus, une classe particulière de questions. Or, bien qu'il soit toujours possible, à la rigueur, comme dans le dernier exemple où M. Chasles croit voir un porisme, d'introduire l'idée du mouvement dans tous les lieux géométriques, puisqu'ils sont décrits par un point qui se déplace, nous croyons néanmoins que, dans tous les porismes d'Euclide, une ou plusieurs parties de la figure étaient véritablement mobiles, comme nous l'avons vu dans l'exemple deviné par R. Simson et dans la description des coniques par Newton.

On remarquera d'ailleurs que cette opinion n'est contraire à aucune de celles que nous avons exposées. Par exemple, on peut joindre l'idée de mouvement à la plupart des questions de la théorie des transversales, sinon à toutes.

Nous allons continuer à citer la traduction de M. Breton de Champ, sauf quelques points où nous nous permettrons de nous en écarter.

« Après les *contacts*, viennent les Porismes d'Euclide, recueil que » rendent très-utile, pour l'analyse des problèmes et des théories, » beaucoup de choses dont la nature offre une abondance illimitée. »

Le mot que nous avons traduit par *des théories* est écrit γενῶν dans

les manuscrits, ce qui signifie *des genres*. Nous entendons par là certains genres de problèmes, c'est-à-dire un ensemble de questions analogues entre elles. Cette expression *théorie* est un peu étendue pour cette idée; cependant on dit quelquefois : la théorie du quadrilatère inscrit, la théorie du contact des cercles, etc. M. Breton de Champ remplace γενῶν par γενομένων qu'il traduit : *des conséquences des hypothèses.*

« Il n'a toutefois été ajouté aucun porisme à ceux qu'Euclide le pre-
» mier a écrits, si ce n'est par certains géomètres qui, avant nous, ont
» mal à propos placé à la suite de quelques-uns de nouvelles dé-
» monstrations; chaque porisme étant à la vérité susceptible de plu-
» sieurs démonstrations, comme nous l'expliquerons, mais Euclide
» n'en donnant chaque fois qu'une seule extrêmement claire. »

Ici nous sommes, avec M. Breton de Champ, dans un dissentiment plus grave que le précédent; il traduit : « Chaque porisme étant, à la
» vérité, *présenté plusieurs fois*.... »

Du reste, voici le texte : ἑκάστου μεν πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, ce qui veut dire, mot à mot : *Chacun à la vérité ayant un nombre limité de démonstrations.*

Mais nous admettons le sens de M. Breton de Champ, quand il parle d'une démonstration d'Euclide *extrêmement claire*. Néanmoins, le texte porte : ὑπεμφαίνουσαν, qui voudrait dire : *esquissée, indiquée à demi*. Cependant nous croyons qu'il a eu raison de traduire comme s'il y avait ὑπερφαίνουσαν.

« La théorie en est fine et naturelle, nécessaire et très-générale, et
» fait les délices de ceux qui savent voir et trouver (πορίζειν). Toutes
» ces choses ne sont, quant à leur *apparence* (εἶδη) [*], ni des théo-
» rèmes, ni des problèmes, mais tiennent en quelque sorte le milieu
» entre les deux; de sorte que les propositions qui ont ces choses pour
» objet peuvent être mises sous la forme de théorèmes ou de pro-
» blèmes; d'où il est résulté que, de beaucoup de géomètres, les uns
» estiment qu'elles doivent être classées parmi les théorèmes, tandis
» que d'autres, ne tenant compte que de la forme des propositions,
» les considèrent comme des problèmes. »

---

[*] Le traducteur rend ce mot par *nature*.

M. Breton de Champ cherche à éclaircir la confusion dont parle Pappus. L'énoncé du porisme que nous avons cité d'après R. Simson se terminait ainsi : ... *Le dernier sommet décrit une droite;* alors la proposition a l'apparence τὸ εἶδος) d'un simple théorème. Mais M. Breton pense que, dans la rédaction d'Euclide, la fin du porisme précédent était conçue de la manière suivante : ... *Quel sera le lieu géométrique décrit par le dernier sommet?*

On voit alors que la proposition présenterait l'apparence d'un problème, et cette idée se fonde sur le mot τὸ ζητουμένον (chose cherchée), qui indiquait chez les Anciens le résultat du porisme.

La question ainsi présentée devait être plus difficile pour ceux qui étudiaient la géométrie, aussi avait-on plus tard modifié les porismes en disant d'avance le résultat, qu'il suffisait ensuite de savoir démontrer. Cette observation explique, selon M. Breton de Champ, le passage suivant de Pappus [*].

« Mais les différences entre ces trois choses ont été mieux connues » des Anciens, ainsi qu'on le voit par leurs définitions; car ils disaient : » Théorème est une vérité que l'on énonce et qu'il faut rendre évi- » dente par une démonstration; problème est un but que l'on définit » et qu'il faut atteindre par une construction; porisme est une chose » qu'on demande de découvrir. Cette définition a été changée par des » géomètres récents, lesquels, hors d'état de découvrir tous les po- » rismes (μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν), mais capables seulement, » à l'aide des éléments de géométrie, de démontrer le résultat sans » pouvoir le deviner (μὴ ποριζόντων δὲ τοῦτο), ont, sans tenir compte » de la définition précitée et de ce qui est enseigné, écrit ceci d'après » la condition accidentelle (l'*accident*, ἀπὸ συμβεβηκότος) : Le po- » risme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse pour que celle-ci devienne » l'énoncé d'un théorème local. »

Nous nous sommes un peu écartés de M. Breton de Champ dans la traduction de ces mots : ἀπὸ συμβεβηκότος, qu'il rend ainsi : *d'après une circonstance particulière* (*à certaines propositions*). Mais nous l'avons suivi dans la définition moderne du porisme, dont voici le texte : πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. En effet,

[*] Nous développerons bientôt nos idées à ce sujet.

nous avons vu que, si l'on ajoute *l'accident à l'hypothèse proprement dite*, cela complète cette hypothèse et permet d'arriver à l'énoncé du théorème local. Quant à la distinction à faire entre un lieu géométrique et un *théorème local*, elle est facile à saisir : Si l'on demande la nature de la ligne que décrit un point dans des circonstances données, la question s'appelle un *lieu géométrique;* si l'on donne d'avance la nature de cette ligne et qu'on demande seulement de démontrer le résultat, la question est un théorème local. Du reste, nous reviendrons sur cette définition du porisme.

L'ancienne définition, telle que la rapporte Pappus, est évidemment insuffisante pour donner l'idée du porisme; en voici le texte : πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. Elle a l'inconvénient très-grave d'employer presque le mot à définir, car πορισμὸς, en langage ordinaire, signifie à peu près la même chose que πόρισμα.

Pappus observe ensuite que peu de géomètres ont compris les porismes (il n'est que trop facile de le croire), et qu'il est surtout presque impossible de réunir plusieurs porismes en un seul. Cependant il énonce, comme résumant dix des propositions du premier livre d'Euclide, le porisme que nous avons cité d'après R. Simson, et qui a rapport à un quadrilatère complet; il le généralise en l'étendant à un nombre quelconque de droites, et il ajoute avec une modestie bien remarquable :

« Il est vraisemblable que l'auteur des *Eléments* n'ignorait pas cette » extension; mais il n'a fait qu'en poser le point de départ; et il pa- » raît avoir répandu dans tous ses porismes les principes et les germes » d'une foule de belles propositions. Il ne faut pas distinguer les po- » rismes d'après les différences des *hypothèses*, mais d'après celles des » *accidents* et des *résultats*. Toutes les hypothèses diffèrent les unes » des autres, étant très-particulières, mais chacun des accidents ou des » résultats se présente absolument le même dans plusieurs hypothèses » différentes. »

On voit que ce passage justifie complétement ce que nous avons dit sur les trois parties de l'énoncé d'un porisme.

L'importance supérieure que Pappus attribue à l'*accident* et au *résultat*, sans doute d'après l'opinion d'Euclide lui-même, tient proba-

blement à ce que l'*accident* indiquant la partie mobile de la figure, détermine l'essence même du porisme, et que le *résultat* donne la nature du lieu cherché, ce qui est, en général, le but de ces propositions.

Nous devons nous demander maintenant si tous les lieux géométriques étaient des porismes et si tous les porismes étaient des lieux géométriques.

Il est d'abord facile de reconnaître que tous les lieux n'étaient pas des porismes; cela se voit par la longue liste où Pappus indique tous les ouvrages nécessaires pour l'étude des lieux géométriques, et dans laquelle les porismes n'occupent pas une grande place; on le voit encore par une phrase qui précède celle que nous venons de citer, et où Pappus considère les lieux géométriques, *en mettant de côté les porismes*.

Quant à la question de savoir si tous les porismes étaient des lieux géométriques, elle est moins facile à résoudre; mais nous croyons que l'on peut encore répondre négativement. La preuve en est dans le porisme qui semble venir, dans le premier Livre, à la suite des dix porismes que Pappus résume en un seul.

Si de deux points fixes on mène deux droites se coupant sur une droite fixe, et que l'une des droites de jonction retranche d'une certaine droite fixe un certain segment à partir d'un point donné sur cette dernière, l'autre droite de jonction retranchera sur une autre droite un segment ayant avec le premier un rapport donné.

Cette traduction, presque littérale, présente quelque obscurité, que l'interprétation suivante, due encore à R. Simson, fait complétement disparaître.

Étant donnés deux points P, P′ *et une droite* IH, *si l'on mène les droites* PI, P′I *à un point quelconque de* IH, *et que* PI *détermine, sur une droite fixe* FH, *à partir du point donné* F, *un segment* FG, *on peut trouver une autre droite* F′H′, *et sur cette dernière un point* F′, *tels que le segment* F′G′, *déterminé par* P′I, *soit à* FG *dans un rapport donné.*

La droite et le point demandé peuvent s'obtenir comme il suit : Par le point P on mène PF, qui rencontre IH en R, et l'on joint RP′, qui passera en F′. D'autre part, on mène PQ parallèle à FH jusqu'à la rencontre de IH en Q, puis l'on joint QP′. La droite cherchée est

parallèle à QP′, et il ne reste plus qu'à la mener de manière que le segment F′G′ soit à FG dans la raison donnée.

C'est surtout d'après cet énoncé que R. Simson semble avoir conçu la définition qu'il donne des porismes, et dont nous avons déjà cité le texte latin. Ici, en effet, on commence par affirmer la possibilité de trouver les choses que l'on doit déterminer ensuite.

Mais cet exemple montre que, si beaucoup de porismes se rattachaient à des lieux géométriques, il n'en était pas ainsi pour tous. En effet, il serait difficile, et surtout peu naturel, de transformer la question précédente de manière à en faire un lieu géométrique.

C'est ici que se termine ce que le texte de Pappus renferme de positif relativement aux porismes. Toutes les autres propositions que donnent sous ce nom divers auteurs, et notamment R. Simson, n'étant plus établies d'après des énoncés complets, ne sont que des restitutions douteuses, et personne ne peut affirmer qu'elles aient figuré dans le Traité d'Euclide.

Cependant nous ne pouvons nous dispenser d'examiner le reste du passage qui donne, sur la forme des porismes, des renseignements très-précieux. Pappus achève d'analyser Euclide d'une manière très-singulière, en supprimant les hypothèses des propositions, et conservant seulement les résultats. M. Breton de Champ observe judicieusement que cela ne doit pas tenir aux altérations des manuscrits, car il est impossible d'admettre un hasard systématique qui détruise toujours la même partie d'une foule d'énoncés. Cela tient donc à l'importance supérieure que Pappus accorde aux résultats sur les hypothèses, ainsi que nous l'avons déjà vu. Tous ces résultats, énoncés par Pappus, commencent par le mot ὅτι, *que*. Ici il y a évidemment quelque chose de sous-entendu : c'est sans doute le mot λέγω, *je dis*, comme dans la plupart des propositions de géométrie.

Comme nous allons le voir bientôt, Pappus cite, probablement d'après Euclide, un si grand nombre de résultats commençant tous par ce mot, ὅτι, qu'on ne peut se défendre de regarder cette formule comme générale dans tous les porismes d'Euclide. Cependant Pappus ne l'emploie pas dans ceux qu'il énonce complétement; mais puisqu'il lui arrive de réunir dix propositions en une seule, il est probable qu'il ne s'est pas toujours attaché à conserver la rédaction d'Euclide.

D'ailleurs il est facile de rétablir la formule indiquée dans les porismes que nous avons cités, et même le dernier énoncé devient plus clair. Ainsi, au lieu de dire : *L'autre droite de jonction retranchera,* etc., nous pouvons mettre : *Je dis que l'autre droite de jonction retranche,* etc. ; c'est-à-dire qu'il faut trouver une autre droite, et sur cette droite un point qui satisfassent aux conditions données.

Tout cela ne s'oppose nullement à la division que nous avons d'abord établie. Ainsi, l'hypothèse proprement dite consiste dans la fixité des points P et P′, des droites IH et FH et du point F ; l'*accident,* dans la mobilité des droites PI, P′I ; enfin le *résultat,* dans la détermination de la droite F′G′ et du point F′, d'après le rapport donné.

Il est aussi facile d'appliquer la formule indiquée au porisme du quadrilatère complet.

Voici, à ce qu'il nous semble, comment cet énoncé pouvait être rédigé par Euclide :

Si, dans un système de quatre droites se coupant deux à deux en six points, les trois situés sur l'une d'elles sont fixes, et que deux des trois autres soient assujettis à se mouvoir chacun sur une droite fixe :

Je dis que :

Le dernier sommet se meut aussi sur une droite.

En admettant la généralité de cette forme, nous croyons que ceux des porismes qui sont relatifs à des lieux géométriques étaient présentés sous l'apparence de théorèmes locaux. Cependant il restait toujours quelque chose à trouver; car il ne suffit pas de connaître la nature d'une ligne, il faut encore déterminer ses éléments. C'est sans doute là ce qui, selon Pappus, embarrassait les géomètres modernes, lesquels, ne sachant pas résoudre tous les porismes (*μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν*), et se contentant de démontrer le résultat sans le trouver, faisaient consister la difficulté dans ce qui manquait à la proposition pour en faire un théorème local.

Cette difficulté est aussi frappante dans ceux des porismes qui ne se réduisent pas à des théorèmes locaux. Ainsi, dans celui que nous avons énoncé précédemment, *il fallait trouver une droite* F′H′, *et sur cette droite un point* F′, *tels que le segment* F′G′, *déterminé par* P′I, *fût à* FG *dans un rapport donné.* Pour cela, on devait d'abord, par la

construction que nous avons indiquée, déterminer F′G′ et F′. Voilà ce qui embarrassait la plupart des contemporains de Pappus; ensuite il restait à démontrer que la droite et le point ainsi obtenus jouissaient effectivement de la propriété voulue. C'est à cela que se bornait le talent de plusieurs géomètres, *qui démontraient que telle solution était juste, mais ne savaient pas la trouver* : (δεικνύντων μόνον τοῦθ' ὅτι ἔστι τὸ ζητούμενον, μὴ πορίζόντων δὲ τοῦτο).

Pour donner l'idée de la manière dont Pappus tronque les énoncés des propositions d'Euclide, nous allons achever de citer l'analyse du premier Livre :

« Dans les porismes qui suivent, *je dis* :

» Que tel point décrit une droite donnée de position;

» Que le rapport de telle droite à telle autre est constant;

» Que le rapport de telle droite à une abscisse qu'elle détermine est » constant;

» Que telle droite est donnée de direction;

» Que telle droite passe par un point fixe;

» Que telle droite a un rapport constant avec un segment intercepté » entre elle et un point fixe;

» Que telle droite a un rapport constant avec une autre droite me- » née de son extrémité variable;

« Que tel rectangle a un rapport constant avec le rectangle qui a » pour côtés une certaine droite variable et une droite donnée;

» Que tel rectangle équivaut à un rectangle constant, plus un autre » rectangle qui varie proportionnellement à une certaine abscisse.

» Que tel rectangle variable, pris seul ou avec un espace donné, a » un rapport constant avec une certaine abscisse.

» Que telle droite variable, plus une autre droite proportionnelle à » une seconde droite variable, est dans un rapport constant avec un » segment mesuré à partir d'un point fixe.

» Que le triangle qui a pour sommet un point fixe et pour base une » droite variable, est équivalent au triangle qui a pour sommet un » autre point fixe, et pour base un segment mesuré à partir d'un » point fixe.

» Que la somme de deux droites variables a un rapport constant » avec un segment mesuré à partir d'un point fixe.

» Que telle droite détermine sur des droites données des droites » dont le produit est constant. »

Il serait trop long de copier tout ce qui a rapport aux deux autres Livres : les questions du second étaient relatives à des mesures de surfaces, et celles du troisième considéraient des circonférences, tandis que dans les deux premiers il ne s'agissait guère que de lignes droites. Mais l'on doit observer dans ces trois Livres, qu'il s'agit toujours *de lignes variables, de figures dont certaines parties étaient mobiles,* et c'est pour le faire voir que nous avons complétement transcrit tout ce que dit Pappus pour achever l'analyse du premier Livre.

L'auteur termine en disant que le *Traité des Porismes* contenait en tout cent soixante et onze théorèmes, et qu'il était accompagné de trente-huit lemmes : il donne même ces lemmes avec leurs démonstrations, faites, en général, au moyen des proportions que les anciens maniaient avec une grande habileté.

Ces lemmes sont peu remarquables en eux-mêmes; mais, pour en donner l'idée, nous citerons l'énoncé de celui que l'on appelait l'*autel,* parce que la figure présente à peu près la forme d'un autel ancien.

Dans un quadrilatère ABCD *dont les diagonales* AC, BD *se coupent en* O, *prenez respectivement sur* OB *et* OC *les distances* OE, OF, *telles que* EF *soit parallèle à* BC *et que* DF *soit parallèle à* AB; *la ligne* AE *sera parallèle à* DC.

Voici donc, en résumé, ce que nous croyons pouvoir conclure sur les porismes, et nous ferons observer de nouveau que notre opinion n'est essentiellement contraire à aucune de celles qui ont été émises jusqu'à présent, et qu'elle a pour but de les compléter plutôt que de les combattre.

Quant au fond,

Les porismes étaient des propositions relatives aux figures en mouvement, c'est-à-dire où diverses parties de la figure étaient mobiles.

Les conditions de la mobilité étaient contenues dans l'hypothèse, mais les conséquences de cette mobilité se retrouvaient nécessairement dans le résultat, où il est toujours question de lignes variables, comme nous l'avons vu précédemment.

De plus, certains porismes se rattachaient à des lieux géométriques; pour certains autres il n'en était pas de même.

Quant à la forme,

Les porismes pouvaient se présenter comme des problèmes ou comme des théorèmes; cependant les énoncés anciens, ceux d'Euclide, avaient l'apparence de problèmes. En effet, comme Robert Simson le fait observer, il fallait d'abord prouver qu'il était possible de découvrir certaines lignes ou certains points qui satisfissent à des conditions données; puis, quand on avait trouvé ces lignes ou ces points, il fallait démontrer qu'ils jouissaient en effet des propriétés indiquées. Pour cela, on pouvait procéder par analyse ou par synthèse.

Mais plus tard certains mathématiciens, peut-être dans le but de faciliter l'étude de la Géométrie, avaient préféré mettre les porismes sous forme de théorèmes, c'est-à-dire qu'ils donnaient d'avance la solution, et ne laissaient plus aux élèves que la peine de la démontrer.

Donc, ceux des porismes qui se rattachaient à des lieux géométriques étaient énoncés comme des théorèmes locaux; ce qui n'empêchait pas qu'il n'y eût quelque chose à trouver comme dans un problème, car Euclide donnait bien d'avance la nature du lieu géométrique, mais non pas ses éléments, et c'était là ce qu'il fallait découvrir.

SUR L'ÉQUATION

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4m.$$

[Extrait d'une Lettre de M. LEJEUNE-DIRICHLET à M. LIOUVILLE].

Permettez-moi, cher ami, de revenir un instant sur la conversation que nous avons eue dernièrement sur le beau théorème de Jacobi relatif au nombre des décompositions d'un entier en quatre carrés, théorème que l'illustre géomètre a tiré d'abord de ses séries elliptiques et dont il a donné depuis une démonstration arithmétique [*]. Ayant mieux rappelé mes souvenirs, je vais vous présenter avec plus de développement, et surtout avec un peu plus d'ordre, ce que l'autre jour je n'ai pu que vous indiquer. Comme je vous le disais, j'ai toujours éprouvé quelque difficulté, ce qui, je crois, est arrivé aussi à d'autres personnes, lorsque j'ai voulu reproduire cette belle démonstration sans avoir le texte de l'auteur sous les yeux et sans recourir aux opérations sur les séries, dont la démonstration de Jacobi, ainsi qu'il en avertit lui-même, n'est que la traduction. Cette circonstance m'a fait chercher il y a déjà longtemps à fonder sur d'autres principes une nouvelle démonstration du théorème dont il s'agit, mais je n'en parlerai pas ici, cette démonstration devant trouver naturellement sa place dans un travail dont la rédaction m'occupe depuis quelque temps. Pour le moment, je n'ai d'autre objet que de simplifier celle de Jacobi, et de la rendre surtout plus facile à retenir, en mettant dans tout son jour le fait arithmétique ou plutôt algébrique qui en forme le principal fondement.

Pour éviter des répétitions inutiles, je remarquerai que tous les entiers que nous désignerons par des lettres latines sont positifs et impairs, à l'exception de ceux désignés par x et x', qui ne sont pas assujettis à cette limitation.

[*] *Journal de Crelle*, tome XII, page 167.

Quant au lemme qui sert de point de départ à Jacobi et qui définit le nombre des solutions de l'équation

$$t^2 + u^2 = 2p,$$

p étant supposé donné, je ne reproduirai pas ici la démonstration très-simple que Jacobi en a donnée, d'autant plus que ce lemme rentre dans une proposition générale dont j'ai eu à parler ailleurs [*]. On sait qu'il faut opérer toutes les décompositions

$$p = ad$$

de p en deux facteurs, et que le nombre en question est égal à l'excès du nombre des cas où le premier facteur a est de la forme $4\nu + 1$, sur celui des cas où a est de la forme $4\nu + 3$; en convenant donc de faire correspondre à chaque décomposition une unité δ, positive ou négative selon ces deux cas, le nombre dont il s'agit sera exprimé par la somme

$$\sum \delta.$$

Cela posé, cherchons à déterminer le nombre des solutions de l'équation

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4m, \tag{1}$$

dans laquelle m indique un entier impair donné. Pour obtenir toutes ces solutions, il faudra poser de toutes les manières possibles

$$4m = 2p + 2q \quad \text{ou} \quad 2m = p + q,$$

et résoudre ensuite pour chaque couple p, q, de la manière la plus générale, les deux équations

$$t^2 + u^2 = 2p, \quad v^2 + w^2 = 2q.$$

Si, considérant d'abord un couple déterminé p, q, nous faisons correspondre à chaque décomposition

$$q = bc,$$

[*] *Journal de Crelle*, tome XXI, page 3.

une unité $\varepsilon = \pm 1$, qui dépende de b de la même manière que δ de a, le nombre des solutions de l'équation (1) qui répondent à ce couple p, q, sera

$$\sum \delta . \sum \varepsilon,$$

ou encore

$$\sum \eta,$$

les termes de cette somme répondant aux combinaisons différentes que l'on peut former avec les décompositions

$$p = ad, \quad q = bc,$$

et η étant égal à l'unité positive ou négative, selon que les restes de a et b, lorsqu'on les divise par 4, sont ou ne sont pas égaux, ou, ce qui revient au même, selon que $a - b$ est ou n'est pas divisible par 4. Ceci bien entendu, il est manifeste que le nombre de toutes les solutions de notre équation (1) sera encore exprimé par la somme

$$\sum \eta,$$

dont les termes dépendront toujours de la même manière de a et b, mais répondront maintenant à toutes les combinaisons que a et b présentent dans la solution complète de l'équation

$$2m = ad + bc. \tag{2}$$

Avant d'aller plus loin, il est bon de faire une remarque très-simple et qui nous sera utile plus tard : c'est que, parmi les deux entiers pairs $a - b$ et $c + d$, il y en a toujours un, et qu'il n'y en a qu'un qui soit divisible par 4. En effet, s'il en était autrement, on aurait

$$\text{ou } a \equiv b,\ c \equiv -d, \quad \text{ou} \quad a \equiv -b,\ c \equiv d \pmod 4,$$

et il en résulterait $ad + bc \equiv 0 \pmod 4$. On peut donc définir η autrement en disant que η est égal à -1 ou à $+1$, selon que $c + d$ est ou n'est pas divisible par 4.

Distribuons maintenant les solutions de l'équation (2) en deux classes, en comprenant dans la première celles qui sont telles que $a = b$,

et dans la seconde toutes les autres. Comme ces dernières sont associées deux à deux et résultent l'une de l'autre, en échangeant à la fois a avec b, et d avec c, ce qui ne changera pas la valeur de η, on voit que le nombre H des solutions de l'équation (1) peut être mis sous la forme

$$\mathrm{H} = \sum \eta' + 2 \sum \eta'',$$

les termes η' de la première somme, qui sont d'ailleurs tous égaux à l'unité positive, répondant aux solutions (2) pour lesquelles on a $a = b$, et ceux η'' de la seconde aux solutions (2) qui satisfont à la condition $a > b$.

Cela posé, nous allons considérer d'abord les solutions (2) pour lesquelles on a $a > b$. Posant pour cela

$$a' = c(x+1) + d(x+2), \quad c' = a(x+1) - b(x+2),$$
$$b' = cx + d(x+1), \quad d' = -ax + b(x+1),$$

nous aurons identiquement

$$a'd' + b'c' = ad + bc.$$

Il résulte de là que toute solution de l'équation (2) en fournit une infinité d'autres au moyen de l'entier indéterminé x, mais il reste à voir à quelle limitation cet entier doit être assujetti pour que a', b', c', d' soient impairs et positifs, et qu'on ait de plus $a' > b'$ comme dans la solution primitive. Or chacun des couples x, $x+1$ et $x+1$, $x+2$, étant composé de deux entiers, l'un pair, l'autre impair, la première condition se trouve toujours remplie. Quant à la seconde, comme on a

$$c' = (a-b)(x+1) - b, \quad d' = b - (a-b)x,$$

on voit qu'elle détermine complétement l'entier x, $(a-b)x$ devant être le multiple du nombre pair et positif $a-b$, immédiatement inférieur à l'impair b, et l'on voit encore, x n'étant pas négatif, que a' et b' seront positifs, et qu'on a de plus $a' > b'$. Après nous être assurés que les expressions données plus haut fournissent toujours une solution unique assujettie aux mêmes conditions que la solution primitive, voyons à quelle solution nous serons conduits si nous prenons la so-

lution a', b', c', d' à son tour pour point de départ. Comme pour cela il faut dans les expressions

$$\begin{aligned} &c'(x'+1)+d'(x'+2), \qquad &&a'(x'+1)-b'(x'+2),\\ &c'x'+d'(x'+1), \qquad &&-a'x'+b'(x'+1). \end{aligned}$$

donner à l'indéterminée x' la valeur entièrement déterminée en vertu de ce qui précède, qui rend ces expressions positives et que, d'un autre côté, les équations posées plus haut donnent par leur résolution celles-ci:

$$\begin{aligned} &a=c'(x+1)+d'(x+2), \qquad &&c=a'(x+1)-b'(x+2),\\ &b=c'x+d'(x+1), \qquad &&d=-a'x+b'(x+1), \end{aligned}$$

dont les premiers membres sont positifs, on voit que x' coïncide avec x, et que nous nous trouvons ramenés à la solution primitive a, b, c, d.

Si maintenant nous observons qu'à nos deux solutions ainsi liées entre elles, et qui se déduisent mutuellement l'une de l'autre par un procédé uniforme, correspondent toujours des valeurs opposées de η'', comme cela résulte de l'équation $a-b=c'+d'$ et de la remarque faite plus haut, nous concluons que $\sum \eta''$ se réduit à zéro, et nous aurons simplement

$$\mathrm{H}=\sum \eta'.$$

Pour évaluer cette somme dont tous les termes η' sont égaux à l'unité positive, tout se réduit à trouver le nombre des solutions de l'équation

$$a(d+c)=2m.$$

Or a étant un diviseur déterminé de m, $\frac{m}{a}=e$ sera aussi un tel diviseur, et l'on aura à résoudre l'équation $d+c=2e$, dont le nombre des solutions est e; d'où il suit, a et par conséquent aussi e devant être successivement égalés à tous les diviseurs de m, que le nombre H qu'il s'agissait de déterminer coïncide avec la somme des diviseurs de m.

(Paris, 11 avril 1856).

NOTE

SUR

LES ARCS DE CERCLE DONT LA TANGENTE EST RATIONNELLE;

PAR M. E. PROUHET.

La Note qu'on va lire est extraite d'un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 25 août 1851 et relatif au nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = \mathrm{N}.$$

Ayant reconnu depuis que ce sujet pouvait être traité d'une manière beaucoup plus simple que je ne l'avais fait, je n'ai conservé de mon travail que quelques propositions sur les arcs de cercle dont la tangente est rationnelle. Ces propositions ne paraîtront peut-être pas tout à fait indignes de l'attention des géomètres, soit à cause d'un tour particulier de raisonnement susceptible d'être étendu à d'autres questions du même genre, soit parce qu'elles offrent un nouvel exemple de cette correspondance singulière remarquée depuis longtemps entre les propriétés du cercle et celles des nombres premiers.

1. Lorsqu'un nombre entier N est la somme de deux carrés a^2 et a'^2, j'appelle *argument* de N tout arc dont la tangente trigonométrique a pour valeur l'un des rapports suivants :

$$\frac{a}{a'}, \quad -\frac{a}{a'}, \quad +\frac{a'}{a}, \quad -\frac{a'}{a}.$$

2. Parmi les arcs en nombre infini que cette définition comprend, il en existe un et un seul dans l'intervalle de 0 à $\frac{\pi}{4}$: je lui donnerai le nom d'*argument principal*. Si on le désigne par α, tous les arguments

seront donnés par l'expression $k\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, k étant un nombre entier positif, négatif ou nul.

3. Le nombre N peut être de plusieurs manières la somme de deux carrés. Dans ce cas, je dirai que deux arguments du nombre N sont *équivalents* ou *distincts* suivant qu'ils correspondront à la même décomposition en deux carrés, ou à des décompositions différentes.

On voit par ce que nous avons dit plus haut que deux arguments α et α' seront équivalents si l'on a

$$\alpha \pm \alpha' \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{\pi}{2}\right).$$

Un nombre N aura autant d'arguments distincts qu'il y aura de manières de le décomposer en deux carrés.

4. Un nombre premier de la forme $4n + 1$ n'a qu'un seul argument, puisqu'un pareil nombre n'est décomposable que d'une seule manière en deux carrés.

L'argument principal du nombre 2 est $\frac{\pi}{4}$.

L'argument principal d'un carré a^2, considéré comme égal à $a^2 + 0^2$, est 0.

Il n'y a pas lieu de considérer d'arguments dans les nombres premiers de la forme $4n - 1$, qui ne peuvent, comme on sait, être la somme de deux carrés. Les produits composés exclusivement de facteurs premiers de cette forme, ne peuvent avoir pour argument principal que 0, et seulement dans le cas où ils sont des carrés parfaits.

Il est bon de remarquer que si un nombre N est la somme de deux carrés, on ne modifiera ni le nombre ni la grandeur de ses arguments en le multipliant par un carré m^2, si m n'a que des diviseurs premiers de la forme $4n - 1$.

5. Théorème I. — *Toute somme algébrique des arguments de plusieurs nombres est un argument du produit de ces nombres.*

Soient d'abord deux nombres

$$N = a^2 + a'^2, \quad P = b^2 + b'^2,$$

et posons

$$\frac{a}{a'} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \frac{b}{b'} = \operatorname{tang}\beta.$$

On a identiquement

$$\mathrm{NP} = (ab' \pm ba')^2 + (a'b' \mp ab)^2.$$

Aux deux modes de décomposition de NP, compris dans cette formule, correspondent des arguments ayant pour tangentes

$$\frac{ab' \pm ba'}{a'b' \mp ab} = \frac{\frac{a}{a'} \pm \frac{b}{b'}}{1 \mp \frac{a}{a'}\frac{b}{b'}} = \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \mp \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = \operatorname{tang}(\alpha \pm \beta).$$

Donc le produit NP a pour arguments

$$\alpha + \beta \quad \text{et} \quad \alpha - \beta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. Le principe étant démontré pour le cas de deux facteurs, il est facile de l'étendre au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

Soient, par exemple, trois nombres, et α, β, γ leurs arguments respectifs. Désignons ces nombres par les symboles $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$: nous aurons (5)

$$[\alpha][\beta] = [\alpha + \beta] = [\alpha - \beta],$$

d'où

$$[\alpha][\beta][\gamma] = [\alpha + \beta][\gamma] = [\alpha - \beta][\gamma],$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}[\alpha][\beta][\gamma] &= [\alpha + \beta + \gamma] = [\alpha + \beta - \gamma] \\ &= [\alpha - \beta + \gamma] = [\alpha - \beta - \gamma].\end{aligned}$$

7. Théorème II. — Réciproquement, *Un nombre décomposable en deux carrés ne peut avoir pour arguments que les sommes algébriques des arguments de ses facteurs premiers.*

Soit

$$\mathrm{N} = a^2 + a'^2 = [\alpha]$$

un nombre décomposable en deux carrés, et que nous supposerons débarrassé de ses facteurs premiers de la forme $4n - 1$, qui ne peuvent influer sur les valeurs de ses arguments. On sait que si un nombre

premier

$$p = b^2 + b'^2 = [\beta]$$

divise N, on doit avoir

$$ab' + ba' = ep, \quad a'b' - ab = e'p,$$

ou bien

$$ab' - ba' = ep, \quad a'b' + ab = e'p,$$

e et e' désignant des nombres entiers. D'où l'on conclut ensuite, dans l'un et l'autre cas,

$$\frac{N}{p} = e^2 + e'^2.$$

Si donc on pose

$$e^2 + e'^2 = [\varepsilon],$$

on aura

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{e}{e'} = \frac{ab' \pm ba'}{a'b' \mp ba} = \operatorname{tang}[\alpha \pm \beta],$$

et, par suite,

$$\varepsilon \equiv \alpha \pm \beta \quad \left(\text{mod. } \frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$\alpha \equiv \varepsilon \pm \beta \quad \left(\text{mod. } \frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi α sera équivalent à $\varepsilon + \beta$ ou à $\varepsilon - \beta$. De même, si $q = [\gamma]$ est un diviseur premier de $e^2 + e'^2$, on aura

$$\varepsilon \equiv \eta \pm \gamma,$$

et, par suite,

$$\alpha \equiv \eta \pm \beta \pm \gamma.$$

En continuant ainsi, on finira par arriver à un quotient qui sera un nombre premier. L'argument α est donc une somme algébrique composée avec les arguments des facteurs premiers de N.

8. Corollaire. — *Le nombre des solutions de l'équation*

$$x^2 + y^2 = [\alpha]^a [\beta]^b \dots [\lambda]^l,$$

où $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ *désignent des arguments de nombres premiers, est égal au nombre des sommes algébriques distinctes que l'on peut former avec* a *termes égaux en valeur absolue à* α, b *termes égaux en valeur absolue à* $\beta, \dots$, *et enfin* l *termes égaux en valeur absolue à* λ.

9. Théorème III. — *Les arguments de deux nombres premiers sont incommensurables entre eux.*

Soient

$$p = [\alpha], \quad q = [\beta]$$

deux nombres premiers différents, et supposons, si c'est possible,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n},$$

m et n étant deux nombres premiers entre eux. Le produit $p^n q^m$ aura pour l'un de ses arguments

$$n\alpha - m\beta,$$

c'est-à-dire 0. Donc $p^n q^m$ serait un carré parfait, ce qui est impossible, puisque l'un au moins des exposants est impair.

10 Corollaire. — Comme l'argument de 2 est $\frac{\pi}{4}$, on voit que les *arguments de tous les nombres premiers de la forme* $4n + 1$ *sont incommensurables avec la circonférence.*

11. Théorème IV. — *Une somme composée d'un nombre fini d'arguments de nombres premiers, multipliés par des coefficients rationnels, ne peut être nulle.*

Soient, par exemple,

$$p = [\alpha], \quad q = [\beta], \quad r = [\gamma]$$

trois nombres premiers distincts, et admettons, si c'est possible, que l'on ait

$$t\alpha - s\beta + u\gamma = 0,$$

t, s, u étant des nombres rationnels, qu'on peut toujours supposer entiers et sans facteur commun. Le produit

$$p^t q^s r^u$$

aura pour l'un de ses arguments

$$t\alpha - s\beta + u\gamma,$$

c'est-à-dire 0. Donc ce produit serait un carré, ce qui est impossible, puisque l'un au moins des trois exposants est impair.

12. Corollaire. — *La circonférence ne peut être égale à la somme des arguments de plusieurs nombres premiers de la forme* $4n+1$, *ni à une somme de ces arguments multipliés par des nombres rationnels.*

13. Théorème V. — *Tout arc dont la tangente est commensurable avec le rayon,* $\frac{\pi}{4}$ excepté, *est incommensurable avec la circonférence.*

Soit

$$\frac{a}{a'} = \operatorname{tang} \alpha,$$

α étant différent de $\frac{\pi}{4}$, et désignons par

$$[\beta],\quad [\gamma],\quad [\delta],\ldots,$$

les facteurs premiers de

$$a^2 + a'^2 :$$

α devra être composé des arguments β, γ, δ, en sorte qu'on aura

$$\alpha \equiv t\beta + r\gamma + s\delta + \ldots \quad \left(\text{mod. } \frac{\pi}{2}\right),$$

t, r, s étant des nombres entiers positifs ou négatifs, qui ne peuvent être tous nuls à moins que α ne soit nul.

Dès lors, si le rapport de α à π ou à $\frac{\pi}{4}$ pouvait être rationnel, on aurait

$$\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}(t\beta + r\gamma + \ldots),$$

c'est-à-dire que l'argument du nombre premier 2 serait une fonction rationnelle et linéaire des arguments d'autres nombres premiers, ce qui est contraire au théorème précédent.

14. Corollaire. — *Le carré est parmi les polygones réguliers circonscrits au cercle, le seul dont le périmètre soit commensurable avec le rayon.*

15. *Remarque.* — Pour savoir si deux arcs dont les tangentes rationnelles sont $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, ont un rapport commensurable, il faudra chercher

les facteurs premiers des nombres

$$a^2 + a'^2, \quad b^2 + b'^2.$$

Si les facteurs premiers ainsi obtenus ne sont pas les mêmes, les arcs sont incommensurables.

Si ces facteurs sont les mêmes, mais que leurs exposants ne soient pas proportionnels, les arcs sont encore incommensurables.

D'où il est aisé de conclure que le rapport $\frac{\text{arc tang } \frac{a}{a'}}{\text{arc tang } \frac{b}{b'}}$ ne peut être rationnel que si l'on a

$$(a^2 + a'^2)^m = (b^2 + b'^2)^n.$$

16. Théorème VI. — *Si* $[\alpha], [\beta], [\gamma], \ldots, [\lambda]$ *sont des nombres premiers différents de la forme* $4n + 1$, *et* a, b, $c, \ldots$, *des nombres entiers sans diviseur commun, aucune partie aliquote de l'arc*

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + l\lambda,$$

ne peut avoir une tangente rationnelle.

Ce théorème, conséquence très-simple des propositions précédentes, peut être regardé comme le résumé et le complément d'une théorie ingénieuse exposée par Lambert dans un très-beau Mémoire, inséré parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1761.

Dans ce Mémoire, Lambert appelle *tangente première* toute tangente rationnelle telle, qu'aucune partie aliquote de son arc n'ait une tangente rationnelle, et à l'aide d'une analyse pleine d'originalité, il établit les propositions suivantes :

1°. La tangente de l'arc $\frac{\pi}{4}$ est première;

2°. Les arcs de deux tangentes premières sont incommensurables;

3°. Il existe une infinité de tangentes premières;

4°. Si tang ω et tang φ sont deux tangentes premières, m et n deux nombres premiers entre eux, la tangente de l'arc $m\omega + n\varphi$ sera première.

On voit par notre théorie que les arcs qui ont une tangente première sont de deux sortes, savoir, des arguments de nombres premiers

ou des sommes de ces arguments respectivement multipliés par des nombres entiers sans diviseur commun. Mais cette distinction essentielle, qui tient aux propriétés des nombres premiers de la forme $4n+1$, ne pouvait être faite par Lambert dont l'analyse était uniquement fondée sur la règle donnée par Euclide pour trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs.

17. Je remarquerai en terminant que les théorèmes démontrés dans cet article s'étendent aux arcs dont la tangente est $\frac{a}{b}\sqrt{m}$, toutes les fois que les nombres de la forme ma^2+b^2 ne peuvent résulter que de la multiplication de nombres premiers de la même forme. C'est ainsi qu'on arriverait à ce théorème : *La circonférence ne peut être obtenue en combinant par voie d'addition ou de soustraction un nombre fini d'arcs dont les tangentes sont de la forme*

$$\frac{a}{b}\sqrt{3},$$

a et b étant des entiers, et

$$3a^2+b^2$$

un nombre premier.

SUR

LA SURFACE ENGENDRÉE PAR LES NORMALES PRINCIPALES D'UNE COURBE A DOUBLE COURBURE;

PAR M. A.-H. CURTIS.

Dans le volume de 1850 de ce Journal, page 332, M. J. Bertrand a discuté analytiquement les propriétés de la surface des normales principales d'une courbe à double courbure. Parmi les résultats auxquels on arrive, sont les suivants :

I. Pour que les normales principales d'une courbe soient en même temps normales principales d'une autre courbe, il faut et il suffit qu'il existe entre les deux courbures de cette courbe une relation linéaire.

II. L'héliçoïde à plan directeur est la seule surface dont les génératrices soient normales principales d'un nombre infini de courbes distinctes.

III. Il est impossible qu'une surface dont la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices, c'est-à-dire une surface formée par les normales aux plans osculateurs d'une courbe, contienne deux lignes distinctes dont les génératrices soient les normales principales.

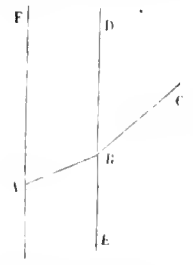
Je me propose d'obtenir ces résultats par une méthode géométrique qui est à la fois plus élémentaire et plus concise que la méthode analytique de M. Bertrand. Elle suppose les deux lemmes suivants, dont le premier a été, à ce que nous croyons, donné premièrement par M. Graves, sous la forme de problème, à un des examens de l'Université de Dublin.

1°. Si chacun des éléments d'une courbe fait un angle constant avec la ligne rectificatrice [*] correspondante, la courbe doit être une hélice tracée sur un cylindre.

Soient AF, BD deux lignes consécutives rectificatrices, et AB, BC les

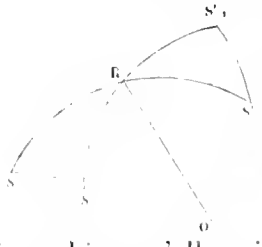
[*] On entend ici par *ligne rectificatrice* la droite qui résulte de l'intersection de deux plans menés par deux points de la courbe infiniment voisins, perpendiculairement aux normales principales en ces points : cette ligne est, par conséquent, parallèle à la plus courte distance de deux normales principales consécutives. La surface rectificatrice (ou rectifiante) est le lieu des lignes rectificatrices.

éléments correspondants. Comme la normale de la surface rectificatrice a la même direction que le rayon de courbure de la courbe, la courbe est une géodésique sur la surface rectificatrice ; donc l'angle ABE = DBC = FAB, par l'hypothèse : de sorte que BD et AF sont parallèles. Les lignes rectificatrices sont conséquemment toutes parallèles ; il suit de là que la surface rectificatrice est un cylindre, et que la courbe étant une géodésique sur cette surface, doit être une hélice.



2°. Si deux courbes ont la même surface pour lieu de leurs normales principales, l'angle d'inclinaison des tangentes aux points où elles sont coupées par la même normale principale est constant.

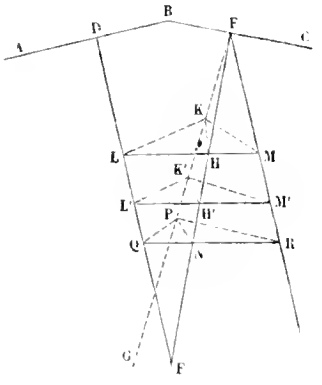
Soient O le centre d'une sphère arbitraire ; OR le rayon parallèle aux rayons coïncidents de courbure des deux courbes ; S, S′ les extrémités des rayons de la sphère parallèles aux deux éléments consécutifs de l'une ; S_1, S'_1 les points correspondants pour l'autre. Maintenant si nous supposons que le rayon de courbure soit tiré à l'*extrémité* de l'élément, cette ligne, bien qu'elle soit en dernier lieu la normale, doit être considérée comme la bissectrice de l'angle obtus entre deux éléments consécutifs de la courbe, et à la limite cet angle devient égal à deux droits. D'après cette convention, SR = S′R, S_1R = S'_1R, et puisque SRS′, S_1RS'_1, sont de grands cercles, l'angle SRS_1 = S′RS'_1, par conséquent SS_1 sera égal à S′S'_1. L'angle entre une paire d'éléments correspondants est conséquemment égal à celui qui se trouve entre la paire consécutive ; en d'autres termes, toutes paires correspondantes sont inclinées au même angle.



Pour prouver les théorèmes de M. Bertrand, nous ferons usage de la construction suivante.

Soient AB, BC deux éléments consécutifs de la courbe de qui l'on suppose que la surface des normales principales soit engendrée. Soient DF, EG deux normales principales tirées des points de milieu de AB et BC, F étant le centre de courbure correspondant à l'élément AB. Soit QP le plus court chemin entre DF et EG. Si alors PN est perpendiculaire à EF, et si ER (la ligne qui passe par E parallèle à DF)

coupe QN au point R, QPR sera un triangle rectangle; car PQ, étant perpendiculaire à EG et à ER, est perpendiculaire au plan déterminé par ces lignes, et par conséquent est aussi perpendiculaire à PR. Supposez que L et K soient deux points consécutifs sur une autre courbe ayant la même surface de normales principales que la courbe dont AB, BC sont les éléments. Tirez KH perpendiculaire à EF; prolongez LH jusqu'à M; et tirez MK. Quand deux courbes coupent le même système continu de lignes droites à angle droit, la distance entre les points où les différentes lignes droites du système sont coupées par les deux courbes est constante: on aura donc LD = KE = HE = a, où a est constant; et de même QD = PE = NE; et conséquemment (comme FD = FE) QN, LH et DE sont parallèles: observez que DE est à la limite un élément de la courbe supposée génératrice de la surface des normales principales.



I. Le premier des théorèmes déjà énoncés peut maintenant être établi.

Puisque l'angle LHK est un angle droit, et que, par le second lemme, l'angle KLH est constant, l'espèce du triangle LHK est constante; ainsi donc $\frac{\text{LH}}{\text{HK}} = c$, où c est constant. Maintenant DFE est l'angle de contingence de la courbe ABC, c'est-à-dire $d\varepsilon$, tandis que l'angle HEK est son angle de torsion, c'est-à-dire $d\eta$; donc

$$\text{LH} = \text{LF (angle DFE)} = (\rho - a)\,d\varepsilon,$$

où ρ est le rayon de courbure, tandis que

$$\text{HK} = \text{HE (angle HEK)} = a\,d\eta;$$

donc

$$(\rho - a)\,d\varepsilon = ac\,d\eta = b\,d\eta,$$

où b est constant, ou bien

$$ds - a\,d\varepsilon = b\,d\eta;$$

donc

$$1 = a\frac{d\varepsilon}{ds} + b\frac{d\eta}{ds},$$

ou, si r est le rayon de torsion,

$$1 = \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r}.$$

On peut montrer de la même manière que la courbe dont LK est un élément doit satisfaire à la condition

$$1 = \frac{-a}{\rho_1} + \frac{b}{r_1},$$

ρ_1, r_1 étant ses rayons de courbure et de torsion, et a et b étant les *mêmes* constantes qu'auparavant

De la même construction, on peut tirer des expressions pour ds_1 élément de la seconde courbe. Car

$$\overline{ds_1}^2 = \mathrm{LK}^2 = \mathrm{LH}^2 + \mathrm{HK}^2 = (\rho - a)^2\,\overline{d\varepsilon}^2 + a^2\,\overline{d\eta}^2$$
$$= \left[(\rho - a)^2\frac{1}{\rho^2} + \frac{a^2}{r^2}\right]\overline{ds}^2 = \left[\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}\right]\overline{ds}^2,$$

comme l'a montré M. J.-A. Serret, ou bien

$$\overline{ds_1}^2 = \mathrm{HK}^2 + \overline{\mathrm{LH}}^2 = (1 + c^2)\,\mathrm{HK}^2 = (1 + c^2)\,a^2\,\overline{d\eta}^2 = (a^2 + b^2)\,\overline{d\eta}^2.$$

Puisque l'angle entre deux lignes parallèles à deux rayons consécutifs de courbure de toute courbe est égal à $\sqrt{\overline{d\varepsilon}^2 + \overline{d\eta}^2}$ (comme cela est évident d'après la construction déjà employée), nous aurons dans le présent cas

$$\overline{d\varepsilon}^2 + \overline{d\eta}^2 = \overline{d\varepsilon_1}^2 + \overline{d\eta_1}^2,$$

$d\varepsilon$ et $d\eta$ étant les angles de contingence et de torsion de la première courbe, et $d\varepsilon_1$ et $d\eta_1$ étant ceux de la seconde. Nous avons donc les équations suivantes qui lient les deux courbes :

$$ad\varepsilon + bd\eta = ds,$$
$$-ad\varepsilon_1 + bd\eta_1 = ds_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\,d\eta,$$
$$\sqrt{\overline{d\varepsilon}^2 + \overline{d\eta}^2} = \sqrt{\overline{d\varepsilon_1}^2 + \overline{d\eta_1}^2}.$$

Elles donnent

$$d\xi_1 = \frac{-a\,d\eta + b\,d\xi}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad d\eta_1 = \frac{a\,d\xi + b\,d\eta}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

de là

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\xi_1} = \frac{(a^2+b^2)\,d\eta}{b\,d\xi - a\,d\eta} = \frac{\dfrac{a^2+b^2}{r^2}}{\dfrac{b}{\rho r} - \dfrac{a}{r^2}},$$

où

$$b = r\left(1 - \frac{a}{\rho}\right);$$

conséquemment

$$\rho_1 = \frac{\dfrac{a^2}{r^2} + \left(1 - \dfrac{a}{\rho}\right)^2}{\dfrac{1}{\rho} - a\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\right)},$$

et de même

$$r_1 = r\left[\frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2\right],$$

expressions qui lient entre eux les rayons de courbure et de torsion des deux courbes, et qui sont beaucoup plus simples que celles données par M. Bertrand.

II. En établissant le second théorème, nous prouverons d'abord qu'il n'est pas possible de tracer sur une surface trois courbes distinctes, pour chacune desquelles elle soit la surface des normales principales, excepté quand la surface est l'héliçoïde, auquel cas on peut y tracer un nombre *infini* de courbes à chacune desquelles elle se trouve avoir ce rapport.

Dans la figure précédemment employée, supposez que L′ K′ soit un élément d'une troisième courbe ayant la même surface de normales principales que celles dont DE et LK sont les éléments, et soient H′ et M′ déterminés par L′K′ de la même manière que H et M ont été déterminés par LK ; soit L′ D = a'. Alors comme a' est constante, et que, par le second lemme, les angles KLH, K′ L′ H′ sont constants aussi, les trois rapports

$$\frac{L'H'}{H'K'}, \quad \frac{H'K'}{HK}, \quad \frac{HK}{LH},$$

sont constants; ainsi donc, par la composition de ces rapports, $\frac{L'H'}{LH}$ ou $\frac{FL'}{FL}$ est constant aussi, de sorte que, comme LL′ est égal à $(a' - a)$, LF et par conséquent FD, c'est-à-dire ρ, est constant. De plus, comme $\frac{FL\,d\varepsilon}{a\,d\eta} = \frac{LH}{HK}$, et par conséquent est constant, $\frac{d\varepsilon}{d\eta}$ ou $\frac{r}{\rho}$ est constant; ainsi donc r est constant aussi.

Maintenant, $\frac{PN}{NR} = \frac{d\eta}{d\varepsilon} = \frac{\rho}{r}$; l'espèce des triangles semblables PRQ et NPQ est conséquemment connue; donc, et l'angle PQR et le rapport QN : NR (qui est égal à FN : NE) sont constants. De la première de ces conditions, puisque QP est parallèle à la ligne rectificatrice de la courbe ABC en D, tandis que QN est parallèle à DE, il suit que la ligne rectificatrice fait un angle constant avec l'élément de la courbe, et par conséquent, d'après le premier lemme, que la surface rectificatrice est un cylindre. tandis que, d'après la seconde condition, il suit que NE ou son égale DQ est constante; tous les points de la courbe sont conséquemment à égale distance de la ligne de striction de ses normales principales; Q et P sont donc deux points consécutifs sur la ligne de striction; l'élément de la ligne de striction est conséquemment parallèle à la ligne correspondante rectificatrice, et comme la direction de cette dernière est invariable, la première doit être rectilinéaire, tandis que la surface rectificatrice, étant produite par des lignes droites parallèles à cette ligne droite et à une distance constante de cette ligne, doit être un cylindre droit sur une base circulaire; la courbe ABC, étant une géodésique sur ce cylindre, est une hélice, et sa surface de normales principales l'héliçoïde; et comme cette surface a le même rapport à toutes les hélices qui y sont tracées, c'est la surface des normales principales d'un nombre infini de courbes.

Pour compléter la preuve du théorème dont il s'agit, il est nécessaire de montrer que l'héliçoïde est la *seule* surface sur laquelle on puisse tracer un nombre infini de courbes pour chacune desquelles elle soit la surface des normales principales. C'est facile à faire. Si un nombre infini de pareilles courbes peuvent être déterminées sur la surface, il s'ensuit *a fortiori* que trois peuvent être déterminées. La surface doit donc être comme précédemment l'héliçoïde.

III. Comme l'héliçoïde est la surface des normales principales d'un nombre infini de courbes, et comme sur cette surface la ligne de striction coupe toutes les génératrices à angle droit, il est clair que le troisième des théorèmes dont il s'agit n'est pas strictement vrai, et qu'il existe des surfaces qui sont chacune le lieu des normales principales de plus d'une courbe, et pour lesquelles la ligne de striction coupe les génératrices rectilignes à angle droit.

Ceci a déjà été remarqué par M. Graves. M. Graves a aussi fait voir que ce cas est réellement compris dans l'équation de condition donnée par M. Bertrand, qui a cependant négligé de considérer le facteur de cette équation qui montre que l'héliçoïde est la solution.

Pour compléter la solution géométrique de la question, il est nécessaire de montrer que l'héliçoïde est la *seule* surface qui satisfait à ces conditions. Comme en ce cas la ligne de striction est une trajectoire orthogonale à angle droit des génératrices rectilignes, RE = QD est constante, et comme ME = LD, est constante aussi,

$$NR : HM :: RP : MK :: RE : ME$$

est constant; donc, comme QR = LM et $QR.RN = RP^2$, $LM.MH : MK^2$ est connu et l'espèce du triangle LHK est connue; donc on connaît aussi celle des triangles semblables HKM , NPR et PQR, et comme. dans le présent cas, chaque élément de la ligne de striction est parallèle à la ligne rectificatrice correspondante par le même raisonnement que ci-dessus, la ligne de striction doit être rectilinéaire, et la surface rectificatrice un cylindre circulaire droit; la courbe est une hélice tracée dessus, et la surface des normales principales un héliçoïde.

SUR LA REPRÉSENTATION DES NOMBRES PAR LA FORME QUADRATIQUE $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$.

Note de **M. J. LIOUVILLE**.

Si l'on veut que cette forme quadratique, où nous supposerons a et b entiers et positifs, a étant au plus égal à b, représente *tous* les nombres 1, 2, 3, 4, etc., sept cas seulement seront possibles, savoir ceux de $a = 1$, $b = 1$, 2 ou 3, et de $a = 2$, $b = 2$, 3, 4 ou 5. Les nombres 2 et 3 empêchent d'aller plus loin : l'un d'eux au moins cesserait d'être exprimable par la forme indiquée, pour des valeurs de a ou de b plus grandes. Le premier cas répond au théorème sur la décomposition des nombres en quatre carrés au plus, que Lagrange a démontré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1770. Le cinquième, qui répond au théorème tiré d'abord par Jacobi de la théorie des fonctions elliptiques, que tout nombre M est de la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

se ramène au premier et *vice versâ*, comme je l'ai fait voir dans ce Journal (1re série, tome X, page 169). On peut en dire autant du deuxième, du quatrième et du sixième : la déduction est même plus facile encore. Pour traiter le troisième cas et prouver que l'équation

$$M = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

est toujours possible, on pourra se servir, pour ainsi dire sans y rien changer, de la méthode même que Lagrange donne pour le premier cas dans le Mémoire cité plus haut. Cette méthode un peu modifiée fournirait aussi une démonstration directe du théorème de Jacobi : elle s'appliquerait également au deuxième, au quatrième et au sixième cas. Mais le septième et dernier cas lui échappe : j'ai pu seulement en conclure que tout nombre ou son double est de la forme

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 10t^2.$$

SUR

LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

[Note rédigée par M. STURM d'après un Mémoire de M. DESPEYROUS.]

L'intégrale sous forme algébrique de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

s'obtient aisément, comme on sait [*], au moyen d'une intégration par parties. En mettant cette équation sous la forme

$$dx\sqrt{1-y^2} + dy\sqrt{1-x^2} = 0,$$

on en déduit

$$\int dx\sqrt{1-y^2} + \int dy\sqrt{1-x^2} = \text{constante}.$$

Or en intégrant par parties, on a

$$\int dx\sqrt{1-y^2} = x\sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

et

$$\int dy\sqrt{1-x^2} = y\sqrt{1-x^2} + \int \frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ajoutant et observant que les termes sous le signe $\int$ donnent une somme nulle en vertu de l'équation proposée, on trouve l'intégrale algébrique

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \text{constante}.$$

La constante arbitraire qu'elle contient est la valeur de y pour $x = 0$. Posons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha, \quad x = \sin\alpha, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos\alpha,$$

[*] *Voir*, par exemple, LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, tome II, page 473.

et de même

$$\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-y^2}} = \beta, \quad y = \sin\beta, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos\beta.$$

Nous aurons

$$d\alpha + d\beta = 0,$$

d'où

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

γ étant une constante. D'ailleurs, pour $\alpha = 0$, on a

$$x = 0, \quad \beta = \gamma, \quad y = \sin\gamma.$$

La constante de notre intégrale est donc $\sin\gamma$. Par suite, il vient

$$\sin\gamma \quad \text{ou} \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

C'est la formule fondamentale de la théorie des fonctions circulaires.

Le même procédé s'applique facilement à la recherche de l'intégrale d'Euler qui donne la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques.

Soit, en effet,

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}} = 0.$$

En multipliant par le produit des dénominateurs et divisant par $1-c^2x^2y^2$, on a

$$\int \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}}{1-c^2x^2y^2}\,dx + \int \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}{1-c^2x^2y^2}\,dy = \text{constante}.$$

Or en intégrant le premier terme par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}}{1-c^2x^2y^2}\,dx &= \frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}}{1-c^2x^2y^2} \\ &+ \int xy\,\frac{(1+c^2)(1+c^2x^2y^2) - 2c^2x^2 - 2c^2y^2}{(1-c^2x^2y^2)^2}\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}} \\ &- 2c^2\int \frac{x^2y^2}{(1-c^2x^2y^2)^2}\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}\,dx.\end{aligned}$$

En échangeant entre elles les deux lettres x et y, on aura le second terme; ajoutant donc et observant que les termes sous le signe $\int$ donnent une somme nulle en vertu de l'équation différentielle proposée, on trouvera

$$\frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}+y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}{1-c^2x^2y^2}=\text{constante}.$$

La constante du second membre est la valeur de y pour $x=0$. Posons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}=\alpha,\quad x=\mathrm{S}(\alpha),\quad \sqrt{1-x^2}=\mathrm{C}(\alpha),$$

$$\sqrt{1-c^2x^2}=\mathrm{R}(\alpha),$$

et de même

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}}=\beta,\quad y=\mathrm{S}(\beta),\quad \sqrt{1-y^2}=\mathrm{C}(\beta),$$

$$\sqrt{1-c^2y^2}=\mathrm{R}(\beta).$$

Nous aurons

$$d\alpha+d\beta=0,$$

d'où

$$\alpha+\beta=\gamma,$$

γ étant une constante. D'ailleurs pour $\alpha=0$, on a

$$x=0,\quad \beta=\gamma,\quad y=\mathrm{S}(\gamma).$$

La constante de notre intégrale est donc $\mathrm{S}(\gamma)$. Par suite il vient

$$\mathrm{S}(\gamma)\ \text{ou}\ \mathrm{S}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{S}(\alpha)\mathrm{C}(\beta)\mathrm{R}(\beta)+\mathrm{S}(\beta)\mathrm{C}(\alpha)\mathrm{R}(\alpha)}{1-c^2\mathrm{S}(\alpha)^2\mathrm{S}(\beta)^2}.$$

C'est la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques.

Elle donne $\mathrm{S}(\alpha-\beta)$ en changeant le signe de $\mathrm{S}(\beta)$. On peut aussi en déduire $\mathrm{C}(\alpha\pm\beta)$ et $\mathrm{R}(\alpha\pm\beta)$.

DU FROTTEMENT

CONSIDÉRÉ COMME CAUSE DE MOUVEMENTS VIBRATOIRES;

PAR M. DUHAMEL.

[Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XLII, page 973].

Le frottement a été considéré pour la première fois comme produisant des vibrations et des sons, dans une Note que j'ai présentée à l'Académie en 1836, et qui avait pour objet l'action de l'archet sur les cordes. Je me propose ici de généraliser le principe qui servait de base à cette théorie et d'en faire de nouvelles applications.

Les lois du frottement n'étaient pas assez connues du temps de Daniel Bernoulli, pour que ce grand physicien pût penser à y rattacher cette action; et il fut obligé d'en chercher une explication dans une sorte d'assimilation de l'archet à une roue dentée. Je crois avoir démontré, dans un Mémoire présenté en 1839, qu'elle ne saurait être admise; et je n'en ai pas eu d'autre à réfuter, parce que tous les traités d'acoustique ou de physique élémentaire parlent de l'emploi de l'archet, sans chercher à rendre raison de son action.

Lorsque j'eus donné la véritable cause du son produit, j'en calculai les effets, et je parvins à cette première proposition générale :

Le mouvement de la corde par rapport à la position d'équilibre qu'elle prendrait sous l'influence d'une force égale à celle du frottement, est le même que celui de la corde librement abandonnée à elle-même, en partant d'une position initiale, qui serait relativement à sa position en ligne droite, ce que celle-ci est par rapport à celle d'équilibre ci-dessus définie.

Il résultait d'abord de cette proposition que sous l'action de l'archet la corde devait exécuter des vibrations de même durée que lorsqu'elle est pincée et abandonnée librement à elle-même; que par conséquent elle devait rendre le même son dans les deux cas : ce qui est conforme à l'expérience.

Mais il se présenta immédiatement à mon esprit une autre conséquence nécessaire qui aurait pu m'inspirer quelque doute, si je n'avais été bien convaincu de l'impossibilité de toute autre explication. Cette conséquence consiste en ce que :

Le mouvement de la corde pincée finissant par s'anéantir par suite des communications avec l'air et les supports, celui de la corde frottée par l'archet pendant un temps indéfini devrait, malgré la persistance de la cause, finir lui-même par s'anéantir.

Or, ce fait n'ayant jamais été énoncé, et pouvant même paraître assez peu vraisemblable, il était nécessaire de le produire ou d'abandonner ma théorie.

Bien assuré d'y parvenir, je n'eus à m'occuper que de la recherche des moyens les plus simples de produire un frottement constant et d'une durée indéfinie. Il suffit pour cela d'employer une roue ayant son axe fixe, et parallèle à la droite qui joint les deux extrémités fixes de la corde. Le frottement de la roue met d'abord la corde en vibration, et fait entendre le son fondamental. Mais si on la fait mouvoir assez rapidement pour que son mouvement relatif soit dans un sens constant, et que par suite la direction de la force de frottement soit constante, on voit bientôt le son disparaître; la corde reste écartée de sa position naturelle, et par conséquent la force de frottement continue à s'exercer, en même temps que le mouvement de la roue continue indéfiniment.

Ce fait curieux, que je venais ainsi de découvrir théoriquement, et de vérifier expérimentalement, ayant fortifié mes idées sur ce point important d'acoustique, j'en étudiai de nouveau les conséquences, et je parvins à la découverte d'un nouveau fait, plus singulier encore que le précédent, mais qui cependant devait être réel si mon explication était juste. Ce fait consiste en ce que *l'on peut établir entre la vitesse et la pression de l'archet des rapports tels, que le son produit soit plus grave que le son fondamental.* Et l'expérience m'a fait voir, en effet, que l'on peut, au moyen de l'archet, tirer d'une corde une multitude de sons fort au-dessous de celui que l'on avait regardé jusqu'ici comme le plus grave. Ainsi la théorie que je proposais résultait nécessairement de l'existence évidente de la force de frottement; et non-seulement elle s'accordait avec les faits connus, mais encore elle avait conduit à

deux découvertes singulières, dont la vérification expérimentale en donnait une confirmation qui ne laissait pas place au doute.

L'action d'un ou de plusieurs archets, ou corps frottants quelconques, étant remplacée par des forces connues, les petits mouvements d'un système quelconque de points soumis à des actions de ce genre rentraient dans les questions ordinaires de mécanique ; et, d'après cela, le problème général pouvait être considéré comme résolu. Il n'était pas inutile cependant de reconnaître les propositions générales, auxquelles on parvient pour un système quelconque, et d'en faire l'application à des cas simples, différents de celui des cordes élastiques. C'est aussi ce que je fis immédiatement. Je ne publiai rien sur ces recherches, pensant que, d'après ce que j'avais fait connaître, chacun pourrait faire ces généralisations, ainsi que ces applications nouvelles. Mais personne cependant n'ayant paru s'en occuper, j'ai jugé à propos d'appeler ici sur ce point important l'attention des physiciens et des géomètres.

Je dois même dire que, bien loin de chercher à aller au delà de ce que j'avais énoncé, on n'a pas encore introduit dans l'enseignement de l'acoustique la force de frottement considérée comme cause de vibrations; et les recueils académiques étant moins lus que les ouvrages élémentaires, il est vraisemblable que beaucoup de professeurs de physique sont hors d'état de rendre compte du son produit par un archet. Ils doivent en être presque tous au point où l'on en était avant la publication de mon Mémoire; et je me souviens qu'un illustre physicien me disait à cette époque qu'il n'avait jamais bien compris jusque-là comment le contact de l'archet ne déterminait pas un nœud dans la corde, comme le contact du doigt ou d'un chevalet.

J'ai cherché à me rendre compte du silence des auteurs sur un sujet aussi essentiel et aussi élémentaire, et j'ai pensé que cela devait tenir aux procédés de démonstration que j'avais employés. Je faisais usage des équations aux différentielles partielles des cordes vibrantes, et les traités de physique ne peuvent supposer au lecteur des connaissances aussi élevées en analyse.

Dans ce Mémoire, je considérerai la force de frottement d'une manière générale, qui renfermera comme cas particulier ce que j'ai dit à l'occasion de l'archet; mais je n'emprunterai aux mathématiques que le principe de la superposition des petits mouvements. J'ai donné une

démonstration aussi élémentaire que possible de ce principe dans mon *Mémoire sur les vibrations d'un système de points matériels*. D'ailleurs il est énoncé et employé dans tous les traités élémentaires, principalement dans la théorie de la lumière ; il n'y a par conséquent aucune raison pour qu'on n'en fasse pas usage dans l'acoustique.

Après avoir exposé la théorie générale, j'en fais l'application à un phénomène que je n'avais pas considéré dans mon premier Mémoire, celui du mouvement longitudinal des verges élastiques. J'indique le moyen le plus régulier de le produire, et je démontre que le son doit être le même que quand la verge est abandonnée à elle-même en partant d'un certain ébranlement initial. Je démontre que si le corps frottant a une vitesse constamment supérieure à celle des points de la verge qui sont en contact avec lui, le son finit par disparaître entièrement, quoique le frottement ait constamment lieu; j'ai vérifié ensuite par l'expérience ce phénomène, analogue à celui que présente la corde vibrante. Quant au phénomène de la production de sons plus graves que le son fondamental, il est bien indiqué par la théorie ; mais il doit être bien moins facile de le réaliser, parce qu'il exige que le corps frottant ait une vitesse moindre que les points de la verge : or le mouvement de ces derniers est incomparablement moindre que celui qui a lieu dans les vibrations transversales des cordes.

Enfin on peut encore prendre pour exemple le cas des mouvements transversaux des verges ; le frottement produisant toujours le même effet qu'un déplacement initial sans vitesse, on devra trouver les mêmes lois pour les sons produits par des frottements transversaux, que par tout autre mode d'ébranlement transversal. C'est aussi ce que l'expérience confirme. Et si elle est faite avec une précision suffisante, on devra constater la prompte disparition du son, lorsque la roue frottante aura une certaine vitesse ; comme aussi l'abaissement du son au-dessous du son fondamental, lorsque la pression sera assez considérable, et la vitesse de la roue suffisamment petite.

Au reste, toutes ces confirmations, si intéressantes qu'elles puissent être, ne sont nullement nécessaires à l'établissement de la théorie exposée dans ce Mémoire, et si quelquefois elles ne se vérifiaient pas, il n'y aurait pas lieu pour cela de douter de l'exactitude de cette théo-

rie, mais simplement de rechercher les circonstances inaperçues qui ne permettraient pas d'en appliquer les conséquences.

Introduction de la force de frottement dans un système de points en équilibre stable.

1. Lorsqu'un corps exerce une pression sur un autre et que leurs surfaces glissent l'une sur l'autre, il se produit sur eux deux forces tangentielles égales et opposées, que l'on nomme *forces de frottement,* qui dépendent de la nature des surfaces, sont proportionnelles à la pression, et indépendantes de la vitesse du glissement. Nous admettons ce principe comme résultant d'un grand nombre d'expériences précises, du moins dans les limites où nous nous renfermerons.

Cela posé, considérons un système de points très-voisins les uns des autres, formant soit un fil, soit un corps élastique quelconque, et dans un état d'équilibre stable. Dans une ou plusieurs parties plus ou moins étendues de sa surface établissons des contacts avec d'autres corps qui les pressent, et glissent en même temps. Il se produira alors sur la surface du système donné des forces tangentielles, qui seront connues de direction et d'intensité, si l'on donne la nature des surfaces en contact, la pression et la direction du mouvement relatif. Dans ce cas, la recherche des différents états par lesquels passera le système, rentre dans la question générale de l'équilibre et du mouvement de ce système sollicité par des forces données.

Ainsi, lorsque l'on promène un archet sur une corde tendue, sur une verge, sur une plaque, ou un corps quelconque, les effets produits pourront être calculés en introduisant une force tangentielle, proportionnelle à la pression exercée, et appliquée en un des points du contact, ou plutôt répartie sur toute l'étendue de la petite surface de contact. On supprimera alors la considération de l'archet, et l'on n'aura plus qu'à chercher le mouvement des points d'une corde ou d'un corps élastique quelconque sollicité par des forces connues.

Le principe de la théorie de l'action de l'archet étant ainsi établi, il ne restera plus qu'à effectuer les calculs dans chaque cas particulier. Mais cette manière d'envisager ces phénomènes conduit à des propositions générales que nous allons faire connaître, et dont la vérification expérimentale servira de contrôle à cette théorie.

Nous commencerons par rappeler à cet effet quelques théorèmes relatifs aux mouvements très-petits des systèmes.

Du principe de la superposition des petits mouvements des systèmes.

2. Dans mon Mémoire sur les *vibrations d'un système quelconque de points matériels*, j'ai démontré, sans avoir recours à aucune intégration, plusieurs théorèmes généraux, dont quelques-uns serviront de base aux démonstrations qui vont suivre. Je vais rappeler en peu de mots en quoi ils consistent.

I^er^ Théorème. — Considérons un système de points matériels dans un état d'équilibre stable, soumis à leur action mutuelle et à des forces extérieures indépendantes du temps, et liés par des équations entre leurs coordonnées. Si on les écarte de leur position primitive, de telle sorte que les distances des molécules voisines aient varié de quantités très-petites relativement à ces distances, et qu'on leur imprime en outre des vitesses arbitraires, on obtiendra après un temps quelconque les déplacements de chaque point, estimés parallèlement à trois axes fixes, en faisant la somme algébrique des déplacements qu'on obtiendrait pour ces mêmes points après un temps égal, dans tous les systèmes en nombre quelconque que l'on formerait en partant de déplacements et de vitesses assujettis à cette seule condition : savoir, que la somme algébrique des déplacements initiaux recompose pour chaque point le déplacement initial proposé, et qu'il en soit de même pour les composantes des vitesses initiales. C'est-à-dire qu'il suffit toujours que la superposition des systèmes initiaux reproduise le système initial proposé, pour que la superposition des états qu'ils présentent respectivement après un temps égal, forme l'état réel du système proposé après ce temps.

II^e^ Théorème. — Si, outre le dérangement initial, on introduit de nouvelles forces, indépendantes des déplacements, et que même quelques-uns des points soient maintenus invariablement dans une position voisine de celle qu'ils avaient dans la position d'équilibre, on pourra d'abord considérer le mouvement comme décomposé en deux autres. Le premier correspondra à l'état initial proposé des points mobiles, en laissant fixement dans leurs premières positions les points qui doivent subir un déplacement fixe. Le second se rapportera à l'hypothèse

où tous les points mobiles partiraient sans vitesse de leur position d'équilibre, où les points dont le déplacement doit être fixe auraient pris leur nouvelle position, et où l'on aurait introduit les forces nouvelles.

Le premier mouvement peut être décomposé en une infinité d'autres, comme l'exprime le premier théorème. Le second peut aussi être décomposé en une infinité d'autres, assujettis à la seule condition que les déplacements fixes et les forces introduites dans chacun d'eux étant composés ensemble, reproduisent les proposés. Dans ces derniers mouvements on partira de déplacements et de vitesses nuls. Mais rien n'empêcherait de supposer des états initiaux qui se détruiraient par leur superposition; car, par une décomposition indiquée précédemment, ils pourraient être remplacés par des systèmes où il n'y aurait dans l'état initial ni déplacement ni vitesse; et en outre par des systèmes qui se détruiraient constamment, parce que les états initiaux superposés se détruiraient, et aucune cause de mouvement n'existerait.

Remarque. — Le premier de ces théorèmes exprime le principe de la composition et de la décomposition des petits mouvements, dans les conditions les plus ordinaires. Le second le généralise en s'appliquant au cas où il y a non-seulement dérangement initial, mais introduction de forces constantes et déplacement constant de certains points. Mais ils ne donnent aucun moyen pour ramener ce cas à celui où le mouvement est dû simplement à un état initial donné. Or cette importante réduction peut se faire au moyen d'une proposition générale que nous allons établir, et qui se trouve encore dans le Mémoire déjà cité, sur les vibrations d'un système.

Comment l'introduction de forces, constantes en grandeur et en direction, et de déplacements constants, peut être remplacée par un simple changement dans l'état initial?

3. Le système proposé ne sera plus en équilibre lorsqu'on y introduira de nouvelles forces, et que quelques-uns des points seront déplacés d'une manière permanente. Mais avec ces nouvelles conditions il existe un état d'équilibre possible; et nous supposons que dans ce nouvel état, toutes les distances des points aient varié de quantités très-petites par rapport à elles-mêmes, et que les directions aient elles-mêmes infiniment peu changé. Il résulte de là que si l'on avait à calculer le mouvement des points par rapport à ce nouvel état d'équilibre,

on serait conduit aux mêmes équations générales qu'en partant du premier; parce que les coefficients constants qui y entreraient ne différeraient des correspondants que de quantités extrêmement petites, que l'on pourrait négliger sans erreur sensible.

Cela posé, rapportons l'état initial proposé aux nouvelles positions d'équilibre. Les composantes des vitesses initiales parallèlement aux mêmes directions seront évidemment les mêmes; mais les déplacements, étant comptés à partir d'origines différentes, devront être augmentés des déplacements même de ces origines, pris en sens contraires. La question devient donc la même que lorsqu'il n'y a ni forces nouvelles introduites, ni déplacement fixe d'aucun point. Il n'y a qu'un simple changement à faire dans l'état initial, et les lois générales reconnues dans ce premier cas subsisteront dans l'autre.

Si maintenant on considérait, relativement à la première position d'équilibre du système, un état initial identique à celui dont il vient d'être question relativement à la seconde, les équations générales du mouvement étant les mêmes, comme nous l'avons remarqué dans ces deux systèmes, le mouvement de chaque point serait le même dans l'un et dans l'autre, en les rapportant à leurs origines respectives. Et comme il est préférable de rapporter tous les mouvements à la position primitive donnée d'équilibre stable, nous énoncerons de la manière suivante la proposition qui vient d'être établie :

« Lorsque les points d'un système sont très-peu écartés de leur po-
» sition d'équilibre stable, et reçoivent de petites vitesses quelconques;
» que de plus quelques-uns d'entre eux sont maintenus fixement dans
» leur nouvelle position, et que l'on introduit des forces constantes
» quelconques : le mouvement de chaque point du système sera le
» même par rapport à sa nouvelle position d'équilibre stable, qu'il se-
» rait par rapport à l'ancienne, si l'on ajoutait aux composantes de
» son déplacement initial, les composantes, changées de signe, du
» déplacement de la position d'équilibre. »

Action d'un archet sur un système, lorsque sa vitesse relative est toujours de même sens.

4. Supposons d'abord que la pression exercée par l'archet sur le corps soit constante, et que sa vitesse soit toujours plus grande que celles des points qu'il touche, le frottement sera alors constant en direc-

tion et en grandeur, puisqu'il est indépendant de la vitesse relative. On a donc introduit ainsi une force constante en grandeur et en direction. Au lieu d'un seul archet, on en peut supposer un nombre quelconque, et la question rentrera toujours dans celle que nous venons de traiter. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

« Lorsqu'un corps élastique, de forme quelconque, est frotté par » un ou plusieurs archets exerçant des pressions constantes, le mouve- » ment de chacun de ses points par rapport à la position d'équilibre ré- » sultant de l'introduction des forces de frottement, est le même que » celui qu'ils auraient par rapport à la première position d'équilibre, » si l'on modifiait convenablement l'état initial. Cette modification con- » siste simplement à retrancher, des composantes des déplacements » initiaux des différents points, les accroissements que subissent les » coordonnées de ces points en passant de leur première position d'é- » quilibre à la seconde. »

Si la pression de l'archet n'était pas constante, mais variait très-lentement, on pourrait la considérer comme constante pendant un intervalle fini, et recevant brusquement le petit accroissement qu'elle aurait acquis à ce moment. On rentre alors dans le premier cas.

3. *Lorsque le système est tel, qu'un état initial quelconque produit en général un mouvement vibratoire à période constante, l'action d'un ou de plusieurs archets produira un mouvement vibratoire de même période.*

En effet, l'action de ces archets peut être remplacée par une modification dans l'état initial; et, par hypothèse, cette modification n'altère pas la périodicité du mouvement. Ainsi, par exemple, une corde élastique pincée fait entendre le même son fondamental, de quelque manière qu'elle soit écartée de sa position rectiligne entre ses deux extrémités fixes. Donc *le frottement de l'archet sur cette corde fera encore entendre ce même son fondamental*, pourvu toutefois que la vitesse relative de l'archet et de la corde soit toujours de même direction. Si la pression changeait lentement, elle pourrait être considérée comme la même pendant un assez grand nombre de vibrations de la corde. Le son serait donc sensiblement le même pendant toute la durée du frottement. L'expérience confirme ces indications de la théorie.

Cessation du son malgré le mouvement de l'archet.

6. Lorsque la vitesse de l'archet surpasse constamment celle des points en contact, nous avons démontré que le mouvement était le même par rapport à la position d'équilibre sous l'influence de la force de frottement, qu'il serait par rapport à sa position primitive d'équilibre, en partant d'un certain état initial. Or dans ce dernier cas l'expérience montre que, par suite des résistances négligées dans le calcul, le mouvement finit promptement par s'éteindre. Il résulte donc de notre théorie qu'il en doit être ainsi du mouvement produit par l'archet : qu'il doit s'éteindre, quoique l'archet continue indéfiniment à se mouvoir en produisant le même frottement; et que l'état final de repos est celui dans lequel il y a équilibre entre toutes les forces du système et celle que produit ce frottement.

Ce phénomène, que rien n'avait annoncé avant cette théorie, a été vérifié par moi dans le cas particulier des cordes vibrantes, et indiqué dans mon premier Mémoire. Il se trouve établi maintenant avec toute la généralité dont il est susceptible.

Action d'un archet dont la vitesse relative n'est pas toujours de même sens.

7. Si, par suite de l'état initial et de la constitution du corps, il arrivait que la vitesse des points en contact avec l'archet fût tantôt plus grande et tantôt plus petite que celle de ce dernier, la force changerait de sens, et les conséquences précédentes ne subsisteraient plus. Il faudrait à chaque changement concevoir le nouvel état d'équilibre correspondant, et prendre pour état initial l'état actuel du système. C'est ainsi que l'on calculerait l'effet d'un léger obstacle opposé au mouvement par le frottement sur un corps immobile : par exemple, lorsque l'on applique légèrement le doigt sur une corde mise en mouvement par un archet, la résistance change alternativement de sens, et pourvu qu'elle dépasse une certaine limite, le point de contact finit par devenir immobile, et forme ce que l'on appelle un *nœud*.

Il peut encore arriver que le point de contact parvenu à la même vitesse que l'archet, soit obligé de le suivre à cause de la résistance que le frottement lui oppose. Dans ce cas la durée de la vibration dans ce sens peut être augmentée d'une quantité plus ou moins grande, dépendante

de la pression et de la vitesse de l'archet. Le son s'abaisse alors, puisqu'il y a moins de vibrations dans le même temps. Cette conséquence de ma théorie a été développée dans mon ancien Mémoire sur l'action de l'archet sur ces cordes. Je l'ai vérifiée par l'expérience, et j'ai ainsi prévu et constaté ce phénomène inattendu, de sons nets et fort au-dessous du son fondamental.

Vibrations longitudinales des verges.

8. Lorsqu'une verge vibre longitudinalement, on peut supposer ses deux extrémités fixes, ou bien l'une fixe et l'autre libre, ou enfin toutes les deux libres.

Considérons d'abord le premier de ces cas, et supposons qu'on produise un frottement constant dans une partie déterminée de sa longueur, ce qui peut être facilement réalisé au moyen de roues situées de côtés différents de la verge et tournant autour de leurs axes respectifs, en exerçant sur elle des pressions invariables; plus la verge sera mince, moins il y aura d'inexactitude à supposer que les forces résultant de toutes ces pressions sont réparties uniformément sur toute l'aire de la section transversale, au lieu de l'être seulement sur son périmètre; et l'on pourra, par conséquent, regarder le mouvement général comme ayant lieu par sections, et dépendant d'une seule coordonnée.

Cela posé, les forces produites par les divers frottements exercés en un nombre quelconque de points de la verge, en ayant égard à la fixité de ses deux extrémités, détermineraient un état d'équilibre dans lequel, en général, toutes les sections seraient écartées de leur position naturelle, excepté les deux extrêmes. Or, d'après le théorème général démontré ci-dessus, le mouvement de chaque section, par rapport à la position qu'elle occupe dans cet équilibre, est le même qu'il serait par rapport à sa position primitive, si on l'écartait de celle-ci d'une quantité de même grandeur et de même sens, que celle-ci l'est de sa position dans l'équilibre dont il vient d'être question.

La question proposée du mouvement produit par les frottements, étant ainsi ramenée à la question connue du mouvement des différentes sections écartées de leur position naturelle et abandonnées sans vitesse, se trouve complétement résolue.

Et il en serait de même pour les deux autres cas des verges. De sorte que les lois des sons produits par le frottement sont absolument les mêmes que ceux que produirait toute cause qui déplacerait les tranches et leur imprimerait une vitesse quelconque, comme par exemple un choc longitudinal. L'expérience vérifie pour les verges ce résultat de la théorie, comme elle l'avait fait pour les cordes.

Nous supposons ici que les forces de frottement conservent chacune leur sens et leur intensité; et il faut pour cela, non-seulement que la pression soit constante, mais encore que la vitesse relative du corps frottant et de la partie de la verge en contact avec lui soit toujours de même direction. On se mettra dans ces conditions, en donnant à ce corps une vitesse suffisante; mais alors il devra se présenter encore, comme dans le cas des cordes, ce phénomène remarquable, que le mouvement et le son devront s'affaiblir et disparaître promptement, quoique les roues frottantes continuent leur mouvement. Les positions qu'occuperont les sections de la verge dans cet état limite, seront précisément celles de l'équilibre sous l'action des forces de frottement. La vérification ne peut en être faite aussi facilement que dans le cas des mouvements transversaux des cordes, vu la petitesse des déplacements longitudinaux; mais la cessation du son est un phénomène très-facile à constater, et *l'expérience a complétement confirmé les prévisions de ma théorie.*

Enfin, pour les verges comme pour les cordes, on peut concevoir que la vitesse de la roue ne soit pas toujours supérieure à celle que les sections en contact tendent à prendre; et alors il devra y avoir abaissement du son. Mais il est peut-être un peu difficile d'assujettir la roue à un mouvement plus lent que celui des sections; je ne crois pas impossible d'y parvenir, mais je n'ai pas fait usage d'appareils assez précis pour produire ce curieux résultat que j'avais constaté facilement dans le cas des cordes. Je serais heureux d'apprendre que quelque habile expérimentateur y fût parvenu.

Vibrations transversales des verges.

9. Notre théorie s'appliquant à tous les systèmes de points et à tous les frottements qu'on y peut appliquer, on peut supposer la direction du frottement perpendiculaire à la longueur de la verge. Les mouve-

ments transversaux qui en résulteront seront donc périodiques comme ceux qui proviennent d'un écartement transversal. On aura les mêmes lois pour les sons produits, et l'on reconnaîtra, comme pour les cordes, les phénomènes de la disparition du son, et de l'abaissement au-dessous du son fondamental.

10. *Remarque.* — Nous avons supposé les vibrations longitudinales des cordes ou des verges produites par des frottements exercés en des points invariables, et il suffisait pour cela de prendre pour corps frottants des roues tournant autour de leurs axes immobiles. Mais le plus ordinairement on ne met pas une si grande précision dans les moyens d'exécution, et le frottement est produit par un corps qu'on fait glisser le long de la corde ou de la verge.

Plaçons-nous dans ces conditions, en supposant que le contact du corps frottant ait lieu dans une assez grande longueur, et que la vitesse de ce corps soit très-petite. Dans un intervalle de temps très-court, mais dans lequel cependant les sections ont pu exécuter un assez grand nombre de vibrations, le corps frottant aura abandonné d'un côté une petite étendue de la verge, et en aura gagné une égale de l'autre. La plus grande partie de la longueur sur laquelle s'opere le frottement sera donc restée la même pendant ce temps, et une petite partie des forces se trouvera seule déplacée et portée de l'arrière à l'avant. On peut donc se regarder comme étant sensiblement dans le cas de forces constantes appliquées à des points constants, au moins pendant le temps nécessaire à l'accomplissement d'un grand nombre de vibrations, et, par conséquent, ces vibrations doivent être sensiblement les mêmes que si le frottement avait rigoureusement lieu aux mêmes points du corps.

Toutefois, on doit dire que ce résultat n'est qu'approximatif; et, bien que l'expérience ne fasse pas apercevoir en général de différence entre les effets produits dans ces différentes circonstances, il est certain que l'étendue du contact et le mouvement du corps frottant pourraient être supposés tels, que le déplacement rapide et irrégulier des points d'application des forces ne permît pas l'établissement d'un son constant, ni peut-être même d'aucun son. Il est au reste bien facile de reconnaître qu'on peut pendant très-longtemps frotter une verge en

changeant irrégulièrement les points de contact, sans qu'il en résulte aucun mouvement vibratoire régulier. Il est donc à désirer que, dans les appareils destinés à des expériences précises, le frottement soit produit au moyen de roues tournant autour de leurs axes immobiles. On aura ainsi l'avantage de produire toujours des sons très-purs, et qui pourront être entretenus aussi longtemps qu'il sera nécessaire.

MÉMOIRE

SUR UN CAS PARTICULIER

DU PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. J. LIOUVILLE [*].

(Lu à l'Académie des Sciences le 4 avril 1842).

Quoique les Géomètres soient loin d'avoir résolu d'une manière complète et générale le problème des trois corps, ils en ont obtenu cependant des solutions particulières dont on peut faire usage quand les coordonnées et les vitesses initiales remplissent certaines conditions. Lagrange et Laplace en ont donné divers exemples, que l'on trouve réunis et démontrés d'une manière simple dans le chapitre VI du X^e^ livre de la *Mécanique céleste*. En voici un digne d'attention : Considérant trois masses rangées en ligne droite, Laplace prouve que si, après avoir établi entre ces masses et les distances qui les séparent une relation convenable, on imprime à deux d'entre elles autour du centre de la troisième des vitesses parallèles l'une à l'autre et proportionnelles aux distances au centre, les trois masses sous l'influence de leurs actions mutuelles resteront par la suite constamment en ligne droite, la droite qui les contient étant bien entendu mobile ; les vitesses et les distances pourront changer avec le temps, mais le rapport des vitesses et celui des distances seront égaux et invariables ; la loi du mouvement de chaque masse sera d'ailleurs la même que pour un point matériel attiré vers un centre fixe.

On sait que, dans notre système, les planètes dont la distance au Soleil est la plus grande se meuvent aussi le plus lentement, et que les carrés des temps des révolutions augmentent à peu près comme les cubes des grands axes des orbites. Dans le système particulier que nous venons d'indiquer, les choses ne se passeraient point ainsi. Quelle que soit en effet celle de nos trois masses que l'on veuille pren-

[*] Le préambule de ce Mémoire a déjà été inséré dans ce Journal (1^re^ série, t. VII, p. 110). On a cru devoir néanmoins le reproduire ici, en donnant à son tour le Mémoire lui-même sans y rien ajouter et sans y rien changer, tel en un mot qu'il a paru il y a quatorze ans dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1845.

dre pour centre du mouvement, les deux autres qui doivent rester en ligne droite avec elle accompliront nécessairement leurs révolutions dans un temps égal, malgré l'inégalité des distances. C'est là assurément un théorème fort remarquable; mais n'oublions pas qu'il suppose, qu'il exige certaines conditions spéciales, et surtout une relation convenable entre les masses et les distances. Étant données trois masses quelconques, on peut du reste toujours faire en sorte que la relation dont il s'agit ait lieu. Pour fixer les idées, admettons que les trois masses soient celles du Soleil, de la Terre et de la Lune, et nous reconnaîtrons avec Laplace que cette relation serait satisfaite en plaçant la Lune sur le prolongement de la droite qui joint le centre du Soleil au centre de la Terre, à une distance de cette dernière planète égale à très-peu près à la centième partie de la distance de la Terre au Soleil : une modification légère dans la valeur de la masse de la Terre rendrait le nombre cité (un centième) rigoureusement exact. Cela étant, Laplace en conclut que si, à l'époque arbitraire prise pour origine, la Lune s'était trouvée en opposition avec le Soleil à une distance de cet astre représentée par 101, celle de la Terre étant représentée par 100, et que les vitesses relatives de la Terre et de la Lune autour du Soleil eussent été aussi à cette époque parallèles et dans le rapport de 100 à 101, la Lune serait toujours restée en opposition avec le Soleil, de manière à ne jamais cesser d'éclairer la terre pendant les nuits.

L'illustre auteur reproduit cette assertion dans l'*Exposition du Système du Monde* : « Quelques partisans des causes finales ont ima-
» giné, dit-il, que la Lune a été donnée à la Terre pour l'éclairer pen-
» dant les nuits. Dans ce cas, la nature n'aurait point atteint le but
» qu'elle se serait proposé, puisque nous sommes souvent privés à la
» fois de la lumière du Soleil et de celle de la Lune. Pour y parvenir,
» il eût suffi de mettre à l'origine la Lune en opposition avec le Soleil
» dans le plan même de l'écliptique, à une distance égale à la cen-
» tième partie de la distance de la Terre au Soleil, et de donner à la
» Lune et à la Terre des vitesses parallèles et proportionnelles à leurs
» distances à cet astre. Alors la Lune, sans cesse en opposition au So-
» leil, eût décrit autour de lui une ellipse semblable à celle de la
» Terre; ces deux astres se seraient succédé l'un à l'autre sur l'hori-

» zon, et comme à cette distance la Lune n'eût point été éclipsée, sa » lumière aurait constamment remplacé celle du Soleil. »

Pour l'exactitude absolue de la proposition énoncée, il faut qu'à l'origine du temps la relation entre les masses et les distances et la proportionnalité de ces dernières aux vitesses aient été rigoureusement vérifiées, ainsi que le parallélisme des vitesses; il faut de plus qu'aucune cause perturbatrice ne vienne par la suite troubler le mouvement, ce qu'on ne peut pas admettre. A la vérité, si le système que nous considérons est un système stable qui tende à résister aux perturbations et à revenir de lui-même à son état régulier de mouvement, cette remarque aura peu d'importance. Il faudrait sans doute avoir égard aux petits dérangements occasionnés par les diverses causes dont l'effet n'est pas insensible, mais cela n'empêcherait pas la Lune d'être toujours à très-peu près sur le prolongement de la droite qui joint le Soleil à la Terre. Or, en tenant compte de la réfraction, on voit qu'un certain écart de la Lune à cette droite ne l'empêcherait pas d'éclairer la Terre pendant la totalité de chaque nuit. Au contraire, si l'état de mouvement dont nous avons parlé plus haut est instable, s'il tend à se détruire de lui-même de plus en plus dès qu'il a éprouvé de légers dérangements (et c'est en effet ce qui a lieu, comme on le verra dans mon Mémoire), alors il faudra reconnaître que ce genre de mouvement ne peut pas exister d'une manière permanente dans la nature.

La vraie question, on le comprend donc, est celle de la stabilité. Se contenter de dire avec l'auteur d'une dissertation imprimée à Rome en 1825 [*], que le système de nos trois masses doit éprouver des perturbations de la part des autres planètes, et qu'ainsi l'opposition de la Lune au Soleil ne peut pas subsister à toute époque mathématiquement, d'une manière absolue (*scrupulosissime*), c'est énoncer une vérité évidente, triviale, et non pas faire une objection sérieuse. Quelle théorie en effet serait à l'abri d'une semblable objection?

Le problème qu'il fallait résoudre et que je traite dans mon Mémoire est le suivant : *Trois masses étant placées non plus rigoureusement, mais à très-peu près dans les conditions énoncées par Laplace, on demande si l'action réciproque des masses maintiendra le système dans cet état particulier de mouvement ou si elle tendra au contraire*

[*] En voici le titre : *Paucis expenditur cl. Laplace opinio de illorum sententiâ qui Lunam conditam dicunt ut noctu tellurem illuminet.*

a l'en écarter de plus en plus. Pour le résoudre d'après la méthode ordinairement suivie dans les questions de stabilité, j'ai dû considérer des équations différentielles linéaires qui se sont d'abord trouvées être à coefficients variables, même en négligeant, comme on pouvait le faire ici, l'excentricité de l'orbite terrestre. Une transformation simple m'a conduit ensuite à des équations à coefficients constants que j'ai pu intégrer. L'intégration terminée, j'ai reconnu que les effets des causes perturbatrices, loin d'être contre-balancés, sont au contraire agrandis d'une manière rapide par les actions mutuelles de nos trois masses : cette conclusion subsiste quels que soient les rapports de grandeur des masses. Si la Lune avait occupé à l'origine la position particulière que Laplace indique, elle n'aurait pu s'y maintenir que pendant un temps très-court.

Le changement de variables ou de coordonnées qui m'a conduit à cette conclusion, en me permettant de transformer en équations à coefficients constants des équations à coefficients variables, m'a fait aussi retrouver par hasard une formule donnée sans démonstration par M. Jacobi. C'est ce que l'on verra dans un *post-scriptum* où j'ai du reste fait observer que la formule dont il s'agit résulte aussi très-facilement d'un théorème général dû à M. Coriolis.

1. Considérons trois points matériels qui s'attirent les uns les autres suivant la loi ordinaire de l'inverse du carré des distances. Admettons que les mouvements relatifs de deux de ces points, savoir m, m', s'effectuent toujours dans un même plan autour du troisième, dont nous supposerons la masse égale à l'unité et où nous placerons l'origine des coordonnées rectangulaires Ox, Oy. Soient x et y les coordonnées de la masse m; x' et y' celles de m'. Désignons par r, r' les distances Om, Om', et par ρ la distance mm'.

Les équations du mouvement de m et m' autour du point O seront

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{(1+m)x}{r^3} + m'\left(\dfrac{x'}{r'^3} + \dfrac{x-x'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{(1+m)y}{r^3} + m'\left(\dfrac{y'}{r'^3} + \dfrac{y-y'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2x'}{dt^2} + \dfrac{(1+m')x'}{r'^3} + m\left(\dfrac{x}{r^3} + \dfrac{x'-x}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} + \dfrac{(1+m')y'}{r'^3} + m\left(\dfrac{y}{r^3} + \dfrac{y'-y}{\rho^3}\right) = 0, \end{cases}$$

et je dis qu'on pourra y satisfaire en prenant pour x et y des valeurs de la forme

$$x = (1+p)\,x', \quad y = (1+p)\,y',$$

p étant une certaine constante, laquelle sera essentiellement positive si l'on admet, comme nous le ferons, que m désigne celle des deux masses m, m' dont la distance au point O est la plus grande.

2. Comme dans l'hypothèse de p positive, les formules

$$x = (1+p)\,x', \quad y = (1+p)\,y'$$

fournissent entre les longueurs absolues ρ, r et r' les relations

$$\rho = pr', \quad r = (1+p)\,r',$$

sans ambiguïté de signes, la substitution de ces valeurs de x et y dans la troisième des équations (1) donnera d'abord

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \left[1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2}\right]\frac{x'}{r'^3} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2} = n'^2.$$

Cette même substitution opérée dans la première des équations (1) donne d'un autre côté

$$(1+p)\frac{d^2x'}{dt^2} + \left[\frac{1+m}{(1+p)^2} + m' + \frac{m'}{p^2}\right]\frac{x'}{r'^3} = 0,$$

résultat que l'on rendra identique avec le précédent en déterminant la constante p par l'équation

$$(2) \qquad \frac{1+m}{(1+p)^3} + \frac{m'}{1+p} + \frac{m'}{p^2(1+p)} = 1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2}.$$

Par une raison de symétrie et sans nouveau calcul, on voit que cette

derniere condition supposée remplie rend de même la deuxième et la quatrième des équations (1) identiques entre elles et avec l'équation

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + n'^2\frac{y'}{r'^3} = 0.$$

Ainsi les équations (1) sont satisfaites en prenant pour x' et y' des valeurs quelconques vérifiant les deux équations

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} = 0, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} + n'^2\frac{y'}{r'^3} = 0,$$

semblables dans leur forme à celles du mouvement d'un corps attiré par un centre fixe, et en faisant ensuite

$$x = (1+p)x', \quad y = (1+p)y',$$

p étant une racine positive de l'équation (2), ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$(3) \quad p^2[(1+p)^3 - 1] = m[(1+p)^3 - p^3] + m'(1+p)^2(1-p^3),$$

ou enfin de l'équation

$$(4) \quad \begin{cases} (1+m')p^5 + (3+2m')p^4 + (3+m')p^3 - (m'+3m)p^2 \\ \qquad - (2m'+3m)p - (m+m') = 0. \end{cases}$$

On n'obtient ainsi, il est vrai, que des intégrales particulières ; mais si les conditions initiales qu'elles supposent sont satisfaites, les intégrales dont il s'agit représenteront nécessairement les mouvements des masses m et m'. Il faudra donc les employer toutes les fois qu'après avoir fixé à volonté les valeurs de

$$x', \quad y', \quad \frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt},$$

à une époque quelconque prise pour origine du temps, on aura assujetti

$$x, \quad y, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt},$$

à avoir respectivement ces valeurs initiales correspondantes

$$(1+p)x', \quad (1+p)y', \quad (1+p)\frac{dx'}{dt}, \quad (1+p)\frac{dy'}{dt}.$$

Or cela exige simplement qu'à une certaine époque, les masses m' et m se trouvent rangées en ligne droite avec le point O à des distances de ce point qui soient (ainsi que leurs vitesses supposées parallèles) dans le rapport de 1 à $1+p$.

5. L'équation (4) a toujours une seule racine réelle positive, et le problème qui consiste à disposer trois masses en ligne droite, de telle sorte que lancées dans l'espace avec des vitesses convenables et abandonnées ensuite à leurs actions mutuelles, elles restent constamment en ligne droite, se trouve ainsi avoir une solution, quelle que soit la masse m' que l'on place entre les deux autres : pour trois masses données, sans aucune indication de l'ordre à établir entre elles, il y a donc trois solutions bien distinctes, puisqu'on peut mettre successivement une quelconque de ces trois masses entre les deux autres.

Ayant pris m' pour masse intermédiaire, on peut sans nuire à la généralité de la solution, placer l'origine des coordonnées au centre de la plus grande des deux masses restantes; c'est ce que nous ferons désormais : nous aurons dès lors $m<1$, et par suite $p<1$, parce qu'en posant $p=1$ et $p=0$ dans le premier membre de l'équation (4), on trouve deux résultats de signes contraires, savoir

$$7(1-m) \quad \text{et} \quad -(m+m').$$

Quand m et m' sont de très-petites fractions, la racine positive p de l'équation (4) est très-petite, et sa valeur approchée est

$$p=\sqrt{\frac{m+m'}{3}}.$$

Si l'on suppose que nos trois masses 1, m', m représentent respectivement le Soleil, la Terre et la Lune, on a

$$p=\frac{1}{100} \text{ à peu près.}$$

comme l'a observé Laplace, et comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de ce Mémoire.

4. Mais jusqu'ici nous avons supposé qu'à l'origine, les conditions relatives aux masses, aux vitesses, aux distances ont été remplies en toute rigueur, et nous avons fait abstraction des perturbations que le

systeme ne peut manquer d'éprouver. Cherchons donc maintenant ce qui arrivera si, par une cause quelconque, les conditions fondamentales de l'état particulier de mouvement qui nous occupe, ont cesse d'être mathématiquement vérifiées, et ne le sont plus qu'à très-peu près. L'action mutuelle de nos trois masses résistera-t-elle à ces légers dérangements, ou bien les favorisera-t-elle au contraire de maniere a détruire complétement, au bout d'un certain temps, la constitution primitive du système? Telle est la question à résoudre. Or je vais faire voir que l'état de mouvement dont nous parlons est instable, et que les effets des causes perturbatrices, loin d'être contre-balancés, sont au contraire agrandis rapidement par les actions mutuelles de nos trois corps.

5. Pour éviter des longueurs inutiles, nous admettrons que les masses m, m' ne sortent pas du plan yOx, en sorte que leurs mouvements continuent à être déterminés par les équations différentielles (1).

Faisons

$$x = (1+p)(x'+u), \quad y = (1+p)(y'+v),$$

p étant la même constante que ci-dessus : les valeurs de

$$u, \quad v, \quad \frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt},$$

seront à l'origine du temps, non plus rigoureusement nulles, mais seulement très-petites, et la question est de savoir si plus tard elles pourront grandir beaucoup, ou si au contraire elles resteront toujours renfermées dans d'étroites limites. A cet effet, cherchons les équations différentielles dont les variables u et v dépendent, et, conformément à la méthode ordinairement suivie dans les questions de stabilité, négligeons les termes qui contiennent les produits de ces variables ou leurs carrés, leurs cubes, etc. Nous arriverons ainsi à des équations linéaires.

En négligeant les termes en u et v au delà du premier degré, nous trouvons d'abord sans difficulté

$$\frac{x}{r^3} = \frac{x'}{(1+p)^3 r'^3} + \frac{1}{(1+p)^2 r'^5} \cdot \left[u - \frac{3x'(ux'+vy')}{r'^2} \right]$$

et

$$\frac{x-x'}{\rho^3} = \frac{x'}{p^3 r'^3} + \frac{1+p}{p^5 r'^5} \cdot \left[u - \frac{3x'(ux'+vy')}{r'^2} \right].$$

En posant comme au n° 2

$$n'^2 = 1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2},$$

la troisième des équations (1) devient donc

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} + \left[\frac{m}{(1+p)^2 r'^3} - \frac{m(1+p)}{p^3 r'^3}\right]\left[u - \frac{3x'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0.$$

La première des équations (1), si on la divise par $(1+p)$ et si l'on a égard à l'équation de condition (2) qui détermine p, donne de son côté

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} + \frac{d^2u}{dt^2} + \left[\frac{1+m}{(1+p)^3 r'^3} + \frac{m'}{p^3 r'^3}\right]\left[u - \frac{3y'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0,$$

d'où par la soustraction résulte

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{n^2}{r'^3}\left[u - \frac{3x'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0, \tag{5}$$

en posant

$$n^2 = \frac{1-mp}{(1+p)^3} + \frac{m' + (1+p)m}{p^3}.$$

En considérant la deuxième et la quatrième des équations (1), on en tirera de même les deux équations

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + n'^2\frac{y'}{r'^3} + \left[\frac{m}{(1+p)^2 r'^3} - \frac{m(1+p)}{p^2 r'^3}\right]\left[u - \frac{3y'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0$$

et

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{n^2}{r'^3}\left[v - \frac{3y'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0. \tag{6}$$

Cela posé, si l'on supprime d'abord complétement les termes en u et v, on aura les équations très-simples

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} = 0. \quad \frac{d^2y'}{dt^2} + n'^2\frac{y'}{r'^3} = 0,$$

qui détermineront pour x' et y' de premières valeurs approchées ; les formules résultantes seront semblables à celles du mouvement ellip-

tique; en négligeant l'excentricité de l'orbite de m' (l'orbite de la Terre), et prenant pour unité la distance Om' ou r', elles deviendront

$$x' = \cos(n't + l), \quad y' = \sin(n't + l),$$

l étant une constante. On substituera au lieu de x' et y' ces valeurs approchées dans les équations (5) et (6), dont on se servira pour déterminer approximativement aussi les valeurs de u et v : on se servira de même de ces dernières pour obtenir des valeurs nouvelles plus exactes de x', y'. Et ainsi de suite, conformément à la méthode connue des approximations successives.

6. Mais pour notre objet, il suffira de discuter les valeurs de u et v qu'on obtient en intégrant les équations (5) et (6) après y avoir fait

$$r' = 1, \quad x' = \cos(n't + l), \quad y' = \sin(n't + l).$$

A cause de $r' = 1$, les équations dont je parle deviennent

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + n^2[u - 3x'(ux' + vy')] = 0, \\ \frac{d^2v}{dt^2} + n^2[v - 3y'(ux' + vy')] = 0, \end{cases}$$

Elles sont encore à coefficients variables, mais on peut les changer dans des équations linéaires à coefficients constants par la transformation que voici.

Posons

$$ux' + vy' = U, \quad uy' - vx' = V,$$

ce qui est au fond substituer aux axes fixes Ox, Oy dont nous nous sommes jusqu'ici servis, des axes mobiles qui suivent pour ainsi dire les masses m' et m dans leur mouvement révolutif autour du point O.

En différentiant et observant que l'on a

$$\frac{dx'}{dt} = -n'y', \quad \frac{dy'}{dt} = n'x',$$

on trouve d'abord

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = x'\frac{du}{dt} + y'\frac{dv}{dt} - n'V, \\ \frac{dV}{dt} = y'\frac{du}{dt} - x'\frac{dv}{dt} + n'U. \end{cases}$$

En différentiant de nouveau, on obtient

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{U}}{dt^2} = x'\dfrac{d^2u}{dt^2} + y'\dfrac{d^2v}{dt^2} - n'\left(y'\dfrac{du}{dt} - x'\dfrac{dv}{dt}\right) - n'\dfrac{d\mathrm{V}}{dt}, \\ \dfrac{d^2\mathrm{V}}{dt^2} = y'\dfrac{d^2u}{dt^2} - x'\dfrac{d^2v}{dt^2} + n'\left(x'\dfrac{du}{dt} + y'\dfrac{dv}{dt}\right) + n'\dfrac{d\mathrm{U}}{dt}. \end{cases}$$

Les valeurs de $\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2v}{dt^2}$ sont fournies par les équations (7), et celles de $x'\frac{du}{dt} + y'\frac{dv}{dt}, y'\frac{du}{dt} - x'\frac{dv}{dt}$ par les équations (8). Opérant la substitution et réduisant, en se rappelant que

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad ux' + vy' = \mathrm{U}', \quad uy' - vx' = \mathrm{V},$$

on aura, tout calcul fait,

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2} + 2n'\frac{d\mathrm{V}}{dt} - (2n^2 + n'^2)\,\mathrm{U} = 0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dt^2} - 2n'\frac{d\mathrm{U}}{dt} + (n^2 - n'^2)\,\mathrm{V} = 0.$$

7. Les équations en U et V que nous venons d'écrire étant linéaires à coefficients constants, on en obtiendra des intégrales particulières si l'on pose

$$\mathrm{U} = e^{\alpha t}, \quad \mathrm{V} = \mathrm{A}e^{\alpha t},$$

et si l'on détermine convenablement les constantes α, A. Ces constantes doivent satisfaire aux deux équations

$$\alpha^2 + 2n'\alpha\mathrm{A} - 2n^2 - n'^2 = 0,$$
$$\mathrm{A}\alpha^2 - 2n'\alpha + (n^2 - n'^2)\,\mathrm{A} = 0.$$

On a donc d'abord

$$\mathrm{A} = \frac{2n^2 + n'^2 - \alpha^2}{2n'\alpha},$$

puis, en éliminant A,

$$\alpha^2 + n^2 - n'^2)\,(2n^2 + n'^2 - \alpha^2) - 4n'^2\alpha^2 = 0;$$

l'équation qui doit déterminer α est donc

$$\alpha^4 + \alpha^2 (2n'^2 - n^2) = (n^2 - n'^2)(2n^2 + n'^2).$$

8. Admettons pour un moment que $n^2 - n'^2$ soit une quantité positive; les deux valeurs de α^2 fournies par cette équation seront réelles, l'une négative, l'autre positive; la première valeur introduira dans U et V des exponentielles imaginaires qui se transformeront en sinus et cosinus, mais la seconde donnera lieu à deux exponentielles dont les exposants αt seront réels et de signes opposés; celle de ces exponentielles dont l'exposant est positif grandira rapidement à mesure que le temps t augmentera; elle empêchera donc les valeurs de U et V de rester très-petites, et par suite rendra instable l'état de mouvement de nos trois corps.

Quand on regarde les trois masses 1, m', m comme représentant respectivement le Soleil, la Terre et la Lune, on a à très-peu près

$$p = \sqrt[3]{\frac{m + m'}{3}} = \frac{1}{100};$$

m et m' étant de petites fractions, on trouve aussi sensiblement

$$n' = 1, \quad n = 2,$$

et, par conséquent,

$$n^2 > n'^2 :$$

ici la valeur réelle et positive de α est plus grande que 2; si l'on ajoute que, d'après la valeur de n', la durée d'une révolution de la Terre autour du Soleil est exprimée par 2π, on se fera une idée exacte de l'énorme rapidité avec laquelle grandit l'exponentielle à exposant positif $e^{\alpha t}$.

Mais sans s'arrêter à un cas particulier, et en observant seulement que la racine p est < 1, il est aisé d'établir en général l'inégalité $n^2 > n'^2$. On a en effet

$$n'^2 = 1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2},$$

$$n^2 = \frac{1 - mp}{(1+p)^3} + \frac{m' + (1+p)m}{p^3},$$

d'où

$$n^2 - n'^2 = \frac{\Delta}{p^3(1+p)^3},$$

en faisant

$$\Delta = p^3[1-(1+p)^3] + m(6p^3+9p^2+5p+1) + m'(1+p)^3(1-p^3).$$

Mais de l'équation (3) on tire immédiatement

$$p^3[1-(1+p)^3] = -m(3p^3+3p^2+p) - m'p(1+p)^2(1-p^3);$$

il vient dès lors

$$\Delta = m(3p^3+6p^2+4p+1) + m'(1+p)^2(1-p^3):$$

puisque p est < 1, cette valeur de Δ est positive; il en est donc de même de la différence $n^2 - n'^2$, et l'état de mouvement assigné aux trois masses 1, m', m est instable. C. Q. F. D.

P. S. Le changement de variables ou de coordonnées dont je viens de faire usage pour transformer en équations à coefficients constants des équations à coefficients variables, peut servir à démontrer une formule que M. Jacobi a donnée en 1836 dans le tome III des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (page 61), et qu'il regarde comme devant être utile dans la théorie des perturbations lunaires [*].

Prenons pour unité la masse de la Terre; désignons par m, x, y, z, et m', x', y', z' la masse et les coordonnées respectives de la Lune et du Soleil : faisons de plus

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

---

[*] Voir aussi le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, tome III, page 58.

Les équations du mouvement de la Lune troublée par le Soleil seront

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{(1+m)x}{r^3} + m'\left(\dfrac{x'}{r'^3} + \dfrac{x-x'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{(1+m)y}{r^3} + m'\left(\dfrac{y'}{r'^3} + \dfrac{y-y'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{(1+m)z}{r^3} + m'\left(\dfrac{z'}{r'^3} + \dfrac{z-z'}{\rho^3}\right) = 0. \end{cases}$$

Admettons, dans une première approximation, que le mouvement du Soleil autour de la Terre soit circulaire et uniforme; prenons pour unité la distance constante r', et supposons que le plan des xy soit celui de l'orbite solaire : les valeurs des coordonnées x', y', z', au bout d'un temps quelconque t, seront de la forme

$$z' = 0, \quad y' = \sin(n't + l), \quad x' = \cos(n't + l).$$

Quant aux équations (a), elles se réduiront à

$$(b)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{(1+m)x}{r^3} + m'\left(x' + \dfrac{x-x'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{(1+m)y}{r^3} + m'\left(y' + \dfrac{y-y'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{(1+m)z}{r^3} + \dfrac{m'z}{\rho^3} = 0, \end{cases}$$

et l'on pourra aisément en trouver une intégrale première. Pour plus de généralité, considérons les équations

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dQ}{dx} - m'x', \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dQ}{dy} - m'y', \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dQ}{dz}, \end{cases}$$

Q étant une fonction quelconque $F(r, \rho, z)$ des trois quantités r, ρ, z, et par suite étant une certaine fonction de x, y, z, t, ce qui donne un sens net aux dérivées partielles prises par rapport à x, y, z. Les équa-

tions (b) se déduisent des équations (A) en faisant

$$Q = \frac{1+m}{r} + \frac{m'}{\rho}.$$

Mais, quelle que soit la fonction Q ou F (r, ρ, z), posons

$$xx' + yy' = u, \quad yx' - xy' = v,$$

d'où, à cause de $x'^2 + y'^2 = 1$, résultera

$$x = ux' - vy', \quad y = uy' + vx'$$

et

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{(u-1)^2 + v^2 + z^2}.$$

En différentiant u, v, et observant que

$$\frac{dx'}{dt} = -n'y', \quad \frac{dy'}{dt} = n'x',$$

nous aurons

$$(B) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = x'\dfrac{dx}{dt} + y'\dfrac{dy}{dt} + n'v, \\ \dfrac{dv}{dt} = x'\dfrac{dy}{dt} - y'\dfrac{dx}{dt} - n'u, \end{cases}$$

puis

$$\frac{d^2u}{dt^2} = x'\frac{d^2x}{dt^2} + y'\frac{d^2y}{dt^2} + n'\left(x'\frac{dy}{dt} - y'\frac{dx}{dt}\right) + n'\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = x'\frac{d^2y}{dt^2} - y'\frac{d^2x}{dt^2} - n'\left(x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt}\right) - n'\frac{du}{dt}.$$

Dans ces deux dernières équations, remplaçons

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt}, \quad x'\frac{dy}{dt} - y'\frac{dx}{dt},$$

par leurs valeurs déduites des équations (A) et (B); rappelons-nous d'ailleurs que l'on a

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad xx' + yy' = u, \quad yx' - xy' = v,$$

et aussi [puisque Q est de la forme F (r, ρ, z)]

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{x-x'}{\rho}\frac{dQ}{dr},$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{y}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{y-y'}{\rho}\frac{dQ}{d\rho}.$$

Tout calcul fait, il nous viendra

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{u-1}{\rho}\frac{dQ}{d\rho} - m' + 2n'\frac{dv}{dt} + n'^2 u,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{v}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{v}{\rho}\frac{dQ}{d\rho} - 2n'\frac{du}{dt} + n'^2 v.$$

Mais r et ρ sont fonctions de u, v et z; on peut donc regarder Q comme une fonction de u, v et z. Sous ce point de vue, on a immédiatement

$$\frac{dQ}{du} = \frac{u}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{u-1}{\rho}\frac{dQ}{d\rho},$$

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{v}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{v}{\rho}\frac{dQ}{d\rho}.$$

Il en résulte

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dQ}{du} - m' + 2n'\frac{dv}{dt} + n'^2 u,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dQ}{dv} - 2n'\frac{du}{dt} + n'^2 v.$$

Multiplions ces deux équations par les facteurs respectifs $2\,du$, $2\,dv$: multiplions aussi par $2\,dz$ la troisième des équations (A), savoir:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dQ}{dz},$$

puis ajoutons les résultats; nous obtiendrons

$$d\frac{(du^2+dv^2+dz^2)}{dt^2} = 2\left(\frac{dQ}{du}du + \frac{dQ}{dv}dv + \frac{dQ}{dz}dz\right) - 2m'du + 2n'^2(udu + vdv),$$

et en intégrant,

$$\frac{du^2+dv^2+dz^2}{dt^2} = 2Q - 2m'u + n'^2(u^2+v^2) + \text{const.}$$

C'est à cette équation que revient au fond la formule de M. Jacobi, l'illustre auteur s'étant borné au cas particulier de

$$Q = \frac{1+m}{r} + \frac{m'}{\rho},$$

ou mieux de

$$Q = \frac{1}{r} + \frac{m'}{\rho},$$

et de plus ayant conservé dans ses calculs les coordonnées primitives x, y qu'il sera aisé de rétablir si on le juge convenable. Sous la forme précédente, on voit qu'elle n'est qu'une application du beau théorème de M. Coriolis sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs (*voyez* le 21ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 268). Nous aurions pu, sans aucun calcul, la déduire de ce théorème, dont la démonstration générale repose au reste sur un changement de coordonnées ou de variables analogue à celui que nous venons d'employer.

DE

LA SURFACE DÉVELOPPABLE

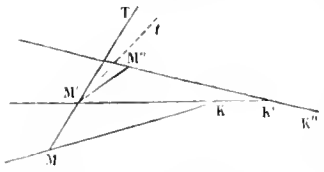
PASSANT PAR UNE COURBE DONNÉE QUELCONQUE, ET QUI, PAR SON DÉVELOPPEMENT, TRANSFORMERAIT CETTE COURBE EN UN ARC DE CERCLE DE RAYON DONNÉ;

PAR M. H. MOLINS,

Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse.

Il sera d'abord aisé de voir que le problème n'est possible qu'autant que le rayon donné surpasse le plus grand des rayons de courbure de la courbe donnée. On déterminera par une formule très-simple l'inclinaison de chaque plan tangent de la surface demandée sur le plan osculateur correspondant de la courbe; cette formule, qui exprime une propriété géométrique remarquable, fournit un mode de génération de cette surface, et permet de former son équation. Comme par chaque élément de la courbe on peut mener deux plans faisant avec le plan osculateur un angle égal à l'inclinaison précédente, on en conclut qu'il existe deux surfaces qui satisfont à la question. On détermine l'angle que fait chaque génératrice de la surface avec la tangente de la courbe donnée, ainsi que les angles de contingence et de torsion de l'arête de rebroussement de cette surface. Enfin on considère le lieu des centres des sphères de même rayon qui ont avec la courbe donnée un contact du second ordre, et l'on reconnaît que la surface polaire de la courbe donnée possède, par rapport à cette nouvelle courbe, la propriété de la transformer, par suite de son développement, en un arc de cercle d'un rayon égal au rayon commun de ces sphères. Réciproquement, la courbe donnée est située sur la surface polaire de la nouvelle courbe, et n'est autre chose que le lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre de cette dernière courbe qui auraient pour rayon commun le rayon donné, de sorte que cette nouvelle surface polaire est justement, par rapport à la courbe donnée, la surface qu'on se proposait de déterminer.

1. Soient M, M′, M″ trois points consécutifs de la courbe donnée, MK, M′K′, M″K″ les génératrices de la surface cherchée qui passent en ces points. Concevons que l'on fasse tourner autour de M′K le plan tangent M′KM jusqu'à ce qu'il se confonde avec le second plan tangent M″M′K′: dans ce mouvement, la droite M′T décrit une portion de cône droit dont l'axe est M′K, et vient prendre la position M′t dans le plan M″M′K′. Dès lors l'angle tM′M″ résulte de la transformation de l'angle TM′M″ qui est l'angle de contingence ε de la courbe donnée; mais ces deux angles sont ceux que forme une même droite M′M″, menée du sommet de ce cône, avec deux génératrices M′T, M′t, dont la dernière est située dans le plan M″M′K passant par M′M″ et l'axe du cône. Il en résulte, comme il est aisé de le voir, que l'angle tM′M″ est le minimum des angles que fait M′M″ avec les diverses génératrices; on a donc



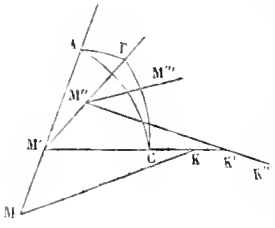
$$t\,M'\,M'' < T\,M'\,M'', \quad \text{ou bien} \quad \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

en appelant ε_1 l'angle tM′M″ qui est l'angle de contingence de l'arc de cercle dans lequel la courbe se transforme. Soient ρ le rayon de courbure de la courbe en M, R le rayon du cercle; l'élément MM′ ou ds étant commun à la courbe et au cercle au point M, on aura

$$\varepsilon = \frac{ds}{\rho}, \quad \varepsilon_1 = \frac{ds}{R},$$

par suite l'inégalité précédente devient $R > \rho$. Ainsi la transformation dont il s'agit n'est possible qu'autant que le rayon donné surpasse le plus grand des rayons de courbure de la courbe donnée.

2. Cherchons l'inclinaison i du plan tangent MM′K sur le plan osculateur MM′M″. Considérons un triangle sphérique ABC situé sur une sphère d'un rayon égal à l'unité dont M′ serait le centre, et déterminé par les plans menés par chaque couple des droites MM′, M′M″, M′K. L'angle A de ce triangle n'est autre chose que l'inclinaison i; on a de plus



$$c = \varepsilon.$$

Ce triangle donne

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A},$$

formule qui devient, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, et remplaçant sin c par ε et cos c par l'unité,

$$\cos a = \cos b + \varepsilon \sin b \cos \mathrm{A}.$$

Mais si l'on fait tourner le plan AM′ C autour de M′ C jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan BM′ C, la droite M′ A dans sa nouvelle position fera avec M′ B un angle égal à $b - a$ qui sera visiblement l'angle de contingence ε_1 de la transformée de la courbe donnée. On a donc

$$b - a = \varepsilon_1,$$

par suite,

$$\cos a = \cos (b - \varepsilon_1) = \cos b + \varepsilon_1 \sin b;$$

cette expression substituée dans la précédente formule donne

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos \mathrm{A}, \quad \text{d'où} \quad \cos \mathrm{A} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon},$$

ou bien enfin

$$\cos i = \frac{\rho}{\mathrm{R}}. \tag{1}$$

Si l'on se donnait l'inclinaison du plan MM′ K sur le plan osculateur MM′ M″, la formule

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos \mathrm{A}$$

déterminerait ce que devient l'angle de contingence de la courbe quand on fait tourner le premier plan autour d'une droite quelconque M′ K qui y est contenue, jusqu'à ce qu'il se confonde avec le plan M″ M′ K : elle montre donc que la nouvelle valeur de l'angle de contingence est indépendante de la position de la droite M′ K dans le plan MM′ K. Réciproquement, si l'on se donne le nouvel angle de contingence, la même formule détermine l'inclinaison qu'il faut donner au plan MM′ K par rapport au plan osculateur.

5. Concevons maintenant que, par les divers éléments de la courbe,

on mène une série de plans faisant avec les plans osculateurs correspondants des angles déterminés par la formule (1); il y aura une surface enveloppe de tous ces plans et telle que, si l'on venait à la développer, la courbe donnée se transformerait en une courbe dont le rayon de courbure serait partout égal à R, c'est-à-dire en un arc de cercle de même rayon. Supposons, par exemple, que la courbe donnée soit un cercle d'un rayon égal à ρ : dans ce cas, les plans tangents de la surface seront également inclinés sur le plan du cercle, et cette surface, qui est l'enveloppe de tous ces plans, sera un cône droit ayant pour axe la perpendiculaire élevée sur le plan du cercle par son centre. En outre, la longueur de chaque génératrice sera visiblement égale à $\frac{\rho}{\cos i}$, quantité égale à R. Dès lors on vérifie ici immédiatement, d'après cette construction, que le développement de la surface transformerait la courbe donnée en un arc de cercle d'un rayon égal à R.

Il existe d'ailleurs deux surfaces qui répondent à la question, puisque par chaque élément de la courbe on peut mener deux plans faisant avec le plan osculateur un angle déterminé par la formule (1). Si l'on voulait que la courbe donnée se transformât en une ligne droite, il faudrait faire $R = \infty$, ce qui donnerait $i = 90°$ en vertu de la même formule. Ainsi les plans tangents de la surface demandée seraient perpendiculaires aux plans osculateurs, et l'on retrouve ainsi la surface que Lancret a fait connaître sous le nom de *surface rectifiante*.

4. Pour former l'équation de chacune des surfaces développables qui répondent à la question, déterminons d'abord celle d'un quelconque des plans dont elles sont les enveloppes. Ce plan doit être conduit suivant la tangente en M, et faire avec le plan osculateur un angle i déterminé par la formule (1). Appelons α, β, γ les angles que fait ce plan avec les plans de trois axes coordonnés rectangulaires, son équation pourra être mise sous la forme

$$(2) \qquad (x' - x)\cos\alpha + (y' - y)\cos\beta + (z' - z)\cos\gamma = 0,$$

x, y, z étant les coordonnées du point M de la courbe, x', y', z' les coordonnées courantes du plan; le même plan devant passer par la tangente en M, on aura

$$(3) \qquad \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0.$$

Soient λ, μ, ν les angles que fait le plan osculateur de la courbe avec les plans coordonnés; si l'on exprime que le cosinus de l'angle du premier plan avec le plan osculateur est égal à $\cos i$ ou à $\frac{\rho}{R}$, on forme la relation

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = \frac{\rho}{R}; \tag{4}$$

on a de plus l'équation de condition

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{5}$$

Les équations (3), (4), (5) détermineront $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ dont il faudra porter les valeurs dans l'équation (2). Éliminant successivement $\cos\alpha$, $\cos\beta$ entre (3) et (4), on obtient

$$\cos\alpha\,(\cos\mu\,dx - \cos\lambda\,dy) = \cos\gamma\,(\cos\nu\,dy - \cos\mu\,dz) - \frac{\rho}{R}\,dy.$$

$$\cos\beta\,(\cos\mu\,dx - \cos\lambda\,dy) = \cos\gamma\,(\cos\lambda\,dz - \cos\nu\,dx) + \frac{\rho}{R}\,dx.$$

On trouve d'ailleurs sans difficulté

$$\cos\nu\,dy - \cos\mu\,dz = -\rho\,d\frac{dx}{ds},$$

$$\cos\lambda\,dz - \cos\nu\,dx = -\rho\,d\frac{dy}{ds},$$

$$\cos\mu\,dx - \cos\lambda\,dy = -\rho\,d\frac{dz}{ds},$$

expressions qui changent les deux dernières équations en les suivantes :

$$\cos\alpha\,d\frac{dz}{ds} = \cos\gamma\,d\frac{dx}{ds} + \frac{1}{R}\,dy,$$

$$\cos\beta\,d\frac{dz}{ds} = \cos\gamma\,d\frac{dy}{ds} - \frac{1}{R}\,dx.$$

Les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\beta$ qu'on tire de ces deux équations, étant portées dans les équations (2), (5), donnent

$$\left\{\begin{array}{l} (x'-x)\left(\cos\gamma\,d\frac{dx}{ds} + \frac{1}{R}\,dy\right). \\ +\,(y'-y)\left(\cos\gamma\,d\frac{dy}{ds} - \frac{1}{R}\,dx\right) + (z'-z)\,d\frac{dz}{ds} = 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

et

$$\cos^2\gamma\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right]+\frac{2}{R}\cos\gamma\left(dy\,d\frac{dx}{ds}-dx\,d\frac{dy}{ds}\right)$$
$$+\frac{1}{R^2}(dx^2+dy^2)-\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2=0.$$

Mais on a les formules

$$\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{ds^2}{\rho^2},$$
$$dy\,d\frac{dx}{ds}-dx\,d\frac{dy}{ds}=\frac{1}{ds}(dy\,d^2x-dx\,d^2y).$$

qui transforment la dernière équation en la suivante :

$$(7)\qquad\begin{cases}\cos^2\gamma+\dfrac{2\rho^2}{R\,ds^3}(dy\,d^2x-dx\,d^2y)\cos\gamma\\ \qquad+\dfrac{\rho^2}{ds^2}\left[\dfrac{1}{R^2}(dx^2+dy^2)-\left(d\dfrac{dz}{ds}\right)^2\right]=0.\end{cases}$$

Cette équation déterminera pour cos γ deux valeurs qu'on portera dans l'équation (6), ce qui donnera les équations des deux plans conduits suivant la tangente en M et faisant avec le plan osculateur un angle égal à i. Pour former les équations des deux surfaces qui sont respectivement les enveloppes des plans de l'une et de l'autre espèce, on regardera dans l'équation (6) la quantité cos γ comme remplacée par la valeur tirée de l'équation (7), et l'on éliminera la variable indépendante dont x, y, z et cos γ sont des fonctions entre l'équation (6) et sa différentielle prise par rapport à la même variable. Si la courbe donnée était plane, il n'y aurait, à proprement parler, qu'une solution, car les deux surfaces seraient visiblement symétriques par rapport au plan de la courbe.

5. Appliquons ce qui précède au cas où la courbe donnée serait une hélice située sur un cylindre circulaire droit. Prenons l'axe du cylindre pour axe des z, et pour plan des x, y le plan même de la base, en ayant soin de faire passer l'axe des x par le point où l'hélice rencontre cette base.

Appelons R′ le rayon du cylindre, a la cotangente de l'angle con-

stant que fait chaque tangente de l'hélice avec la direction des génératrices, $R'.t$ l'arc du cercle de la base compris entre le point où l'hélice rencontre son plan et la projection d'un point quelconque de cette courbe sur le même plan. On aura

$$x = R' \cos t, \quad y = R' \sin t, \quad z = R' at;$$

on trouvera que l'équation (7) devient

$$\cos^2 \gamma - 2 \frac{R'}{R} \sqrt{1 + a^2} \cos \gamma + \frac{R'^2}{R^2} (1 + a^2) = 0,$$

d'où

$$\cos \gamma = \frac{R'}{R} \sqrt{1 + a^2},$$

ce qui montre que les plans tangents de la surface demandée ont une inclinaison constante par rapport à la base du cylindre. On tire des équations (3) et (5)

$$\cos \alpha = a \cos \gamma \sin t \pm \cos t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma},$$
$$\cos \beta = - a \cos \gamma \cos t \pm \sin t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}.$$

Ces expressions, étant portées dans l'équation (2), donnent pour l'équation d'un plan tangent quelconque

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' (a \cos \gamma \sin t \pm \cos t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}) \\ + y' (- a \cos \gamma \cos t \pm \sin t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}) \\ + z' \cos \gamma = R' at \cos \gamma \pm R' \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}. \end{array} \right.$$

Le double signe répond aux surfaces qui satisfont à la question; les signes supérieurs doivent être pris ensemble, et de même les signes inférieurs. Les dérivées du premier et du second ordre de cette équation prises par rapport à t donnent

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' (a \cos \gamma \cos t \mp \sin t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}) \\ + y' (a \cos \gamma \sin t \pm \cos t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}) = R' a \cos \gamma, \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' (- a \cos \gamma \sin t \mp \cos t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}) \\ + y' (a \cos \gamma \cos t \mp \sin t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}) = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de t entre les équations (8), (9), (10) donnera les équations de l'arête de rebroussement de la surface demandée. En ajoutant d'abord les équations (8) et (10), puis les carrés des équations (9) et (10), on trouve

$$(11)\qquad \begin{cases} z' \cos\gamma = \mathrm{R}' a t \cos\gamma \pm \mathrm{R}' \sqrt{\sin^2\gamma - a^2\cos^2\gamma}, \\ x'^2 + y'^2 = \mathrm{R}'^2 a^2 \cot^2\gamma; \end{cases}$$

cette dernière équation montre que l'arête de rebroussement est située sur un cylindre circulaire droit concentrique au premier, et dont le rayon de la base est $\mathrm{R}' a \cot\gamma$. Si l'on élimine successivement x', y' entre (9) et (10), on obtient

$$x' \sin^2\gamma = \mathrm{R}' a \cos\gamma \left(a\cos\gamma\cos t \mp \sin t \sqrt{\sin^2\gamma - a^2\cos^2\gamma}\right),$$

$$y' \sin^2\gamma = \mathrm{R}' a \cos\gamma \left(a\cos\gamma \sin t \pm \cos t \sqrt{\sin^2\gamma - a^2\cos^2\gamma}\right).$$

Ces expressions de x', y' et celle de z', donnée par la première des équations (11), étant différentiées, permettront de calculer ds'; on trouvera

$$\sin\gamma\, ds' = \mathrm{R}' a\, dt, \quad \frac{dz'}{ds'} = \sin\gamma.$$

Donc chaque tangente de l'arête de rebroussement fait un angle constant avec la direction des génératrices du cylindre; par suite cette courbe est une nouvelle hélice située sur un cylindre droit concentrique au premier, et chacune des surfaces cherchées est un héliçoïde développable.

6. Déterminons l'angle KM'M que fait la génératrice KM' avec l'élément MM' ou avec la tangente menée au point M. Cet angle, que nous appellerons i', est le supplément du côté b du triangle sphérique; nous désignerons par ω l'angle de torsion de la courbe. La génératrice KM' est donnée par l'intersection des deux plans tangents conduits suivant MM' et M'M''; le premier de ces plans CM'A fait avec le plan osculateur AM'B ou MM'M'' un angle i dont le cosinus est $\frac{\rho}{\mathrm{R}}$. Donc le second plan tangent CM'B fera avec le plan osculateur suivant M'M''M''' un angle égal à $i + di$, et par suite avec le premier plan

osculateur un angle égal à $i + di \pm \omega$ qui sera visiblement le supplément de l'angle B du triangle sphérique; le double signe de ω se rapporte aux deux surfaces qui satisfont à la question. Le même triangle sphérique donne

$$\cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B,$$

mais

$$b = \pi - i', \quad c = \varepsilon, \quad A = i, \quad B = \pi - (i + di + \omega),$$

en prenant pour ω le signe $+$ pour fixer les idées; la formule précédente deviendra, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$-\varepsilon \cot i' = \cos i - \sin i \cot (i + di + \omega),$$

ou bien

$$\varepsilon \cot i' = \sin i \left[\cot (i + di + \omega) - \cot i\right].$$

On trouve d'ailleurs sans difficulté

$$\cot (i + di + \omega) = \cot i - (di + \omega)(1 + \cot^2 i),$$

par suite on aura

$$\varepsilon \cot i' = -\frac{di + \omega}{\sin i}.$$

Mettant pour $\sin i$ et di leurs valeurs déterminées à l'aide de la relation $\cos i = \frac{\rho}{R}$, on obtient la formule

$$(12) \qquad \varepsilon \cot i' = \frac{d\rho}{R\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)} - \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}}.$$

7. On peut aisément déterminer les angles de contingence et de torsion de l'arête de rebroussement de chaque surface développable. Il est clair que l'angle C du triangle sphérique est l'angle de torsion ω' de cette arête : or ce triangle donne

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

ou bien, en mettant pour A, B, C, c leurs valeurs et rejetant les infi-

niment petits d'un ordre supérieur au second,

$$1-\frac{\omega'^2}{2}=\cos i\cos(i+di+\omega)+\sin i\sin(i+di+\omega).\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right),$$

ou bien

$$1-\frac{\omega'^2}{2}=\cos(di+\omega)-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2 i,$$

ou enfin

$$(13)\quad \omega'=\sqrt{(di+\omega)^2+\varepsilon^2\sin^2 i}=\sqrt{\left(\omega-\frac{d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)^2+\varepsilon^2\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)}.$$

Quant à l'angle de contingence ε' de l'arête de rebroussement qui n'est autre chose que l'angle M′K′M″, on le déterminera à l'aide du triangle M′M″K′.

De la formule (12) qui détermine cot i', on tirerait par la différentiation di' ; on peut donc regarder comme connu l'angle $i'+di'$ qui est égal à l'angle M′M″K′. De plus, l'angle K′M′M″ est mesuré par le côté a du triangle sphérique ; or on a trouvé

$$b-a=\varepsilon\cos i,$$

d'où

$$a=b-\varepsilon\cos i=\pi-i'-\varepsilon\cos i.$$

On a donc

$$\mathrm{M'M''K'}=i'+di',\quad \mathrm{K'M'M''}=\pi-i'-\varepsilon\cos i,$$

par suite le triangle M″M′K′ donnera pour la valeur de l'angle M′K′M″ ou ε',

$$(14)\qquad \varepsilon'=\varepsilon\cos i-di'.$$

Il ne resterait plus qu'à mettre pour cos i et di' leurs valeurs tirées des formules déjà trouvées.

8. Les valeurs de i', ε' serviront à déterminer l'élément ds' de la nouvelle courbe, et par suite l'arc s' au moyen d'une quadrature. Le triangle MM′K donne

$$\mathrm{MK} : ds :: \sin i' : \varepsilon',$$
$$\mathrm{M'K} : ds :: \sin(i'+\varepsilon') : \varepsilon',$$

d'où

$$MK = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i', \quad M'K = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin (i' + \varepsilon');$$

on a d'ailleurs

$$M'K' = MK + d.MK,$$

ou bien

$$M'K' = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' + d.\frac{ds}{\varepsilon'} \sin i'.$$

La quantité ds' étant égale à KK', il vient

$$ds' = M'K' - M'K;$$

mettant pour M' K et M' K' les valeurs précédentes, on trouve

$$ds' = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' + d.\frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' - \frac{ds}{\varepsilon'} \sin (i' + \varepsilon'),$$

ou bien, en rejetant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$ds' = d.\frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' - \cos i' \, ds; \tag{15}$$

on aura donc

$$s' + C = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' - \int \cos i' \, ds,$$

C désignant une constante arbitraire. Si l'on nomme ρ' le rayon de courbure de la nouvelle courbe, on aura

$$\rho' = \frac{ds'}{\varepsilon'} = \frac{1}{\varepsilon'} \left[d.\frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' - \cos i' \, ds \right]. \tag{16}$$

9. Supposons que la courbe donnée soit l'hélice que nous avons considérée au n° 5; on aura

$$\varepsilon = \frac{dt}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \omega = \frac{a \, dt}{\sqrt{1 + a^2}},$$

$$ds = \sqrt{1 + a^2}.R' \, dt, \quad \rho = (1 + a^2) R', \quad \cos i = \frac{R'}{R} (1 + a^2).$$

On trouvera que les formules (12), (13), (14), (15), (16) donnent

$$\cot i' = \frac{Ra}{\sqrt{R^2 - R'^2(1+a^2)^2}}, \quad \omega' = \frac{dt}{R}\sqrt{R^2 - R'^2(1+a^2)}, \quad \varepsilon' = \frac{R'}{R}\sqrt{1+a^2}\,dt,$$

$$ds' = \frac{RR'a\,dt}{\sqrt{R^2 - R'^2(1+a^2)}}, \quad \rho' = \frac{R^2 a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{R^2 - R'^2(1+a^2)}}.$$

L'arête de rebroussement de la surface développable étant ici une nouvelle hélice, appelons r et a' les quantités analogues à R' et a; on aura visiblement

$$a' = \frac{\omega'}{\varepsilon'}, \qquad r = \frac{\rho'}{1+a'^2}.$$

Mettant pour ω', ε', ρ' les valeurs précédentes, on trouve

$$a' = \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{R^2 - R'^2(1+a^2)}{1+a^2}}, \qquad r = R'^2\,a\sqrt{\frac{1+a^2}{R^2 - (1+a^2)R'^2}}.$$

Ces résultats s'accordent avec ceux qu'on a obtenus au n° 5, car a' est la cotangente d'un angle dont le cosinus a été donné par la formule

$$\frac{dz'}{ds'} = \sin\gamma,$$

de sorte qu'on a

$$a' = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\gamma}}{\cos\gamma};$$

si l'on remplace $\cos\gamma$ par sa valeur $\frac{R'}{R}\sqrt{1+a^2}$, on retrouve la précédente valeur de a'. Quant au rayon r qui est celui du cylindre sur lequel est située la nouvelle hélice, on avait trouvé

$$r = R'a\cot\gamma,$$

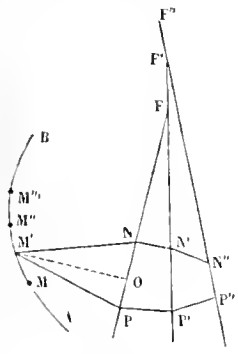
ce qui revient à

$$r = \frac{R'a}{a'};$$

et si l'on met pour a' sa valeur, on retombe sur la précédente valeur de r.

10. Considérons la surface polaire de la courbe donnée, et sur

cette surface la courbe qui serait le lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R. Nous allons démontrer que si l'on développe cette surface, la nouvelle courbe se transformera en un arc de cercle de même rayon. Soient NF l'intersection des



plans normaux en M, M'; N' F' celle des plans normaux en M', M'', ainsi de suite; ces droites sont des arêtes de la surface polaire. Prenons sur ces droites une série de points N, N', N'',..., tels que les distances NM', N'M'', N''M''',..., soient égales à R : le lieu de ces points sera une courbe NN'N''... dont chaque point sera un centre de sphère osculatrice du second ordre d'un rayon égal à R. Pour développer la surface polaire, faisons tourner autour de N' F' le plan NFN' qui est le plan normal en M', jusqu'à ce qu'il se confonde avec le plan normal suivant N' F' N''; dans ce mouvement, la droite N' M' contenue dans le premier plan décrira autour de N' F' une portion de cône droit, et puisque la droite N' F' est l'intersection des plans normaux en M', M'', l'extrémité M' tombera en M'', et la droite NM' dans sa nouvelle position NM'' aura conservé la même longueur égale à R. Pareillement, si l'on fait tourner le second plan normal, confondu avec le premier, autour de N'' F'' jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan normal en M'', le point M'' tombera en M''' puisque N'' F'' est l'intersection des plans normaux en M'', M''', et la droite NM'', qui y est maintenant située, prendra la position NM''' en conservant sa longueur égale à R. En continuant ainsi, on voit qu'après le développement de la surface polaire, le point M' aura parcouru la suite des positions M'', M''',..., et que la droite NM' n'aura pas cessé de conserver sa longueur primitive R. Supposons que l'on ait arrêté le mouvement des divers plans normaux lorsque le point M' sera arrivé en B; alors la surface se trouvera développée dans le plan normal en B, et la droite NB située dans ce plan sera d'une longueur égale à R. Par la même raison, la distance N' B sera égale à R, ainsi de suite; d'où il résulte que la transformée de la courbe NN' N''... sera telle qu'en menant d'un point B de son plan une droite NB à un quelconque de ses points, cette droite sera d'une longueur égale à R. Donc la courbe NN' N''... se trouvera trans-

formée en un cercle d'un rayon égal à R et dont le centre sera le point B : c'est ce qu'il fallait démontrer. Il existe d'ailleurs sur la surface polaire une seconde courbe PP' P''... qui est aussi un lieu des centres de sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R, et qui se transformerait de même en un cercle de même rayon.

11. Il existe entre les courbes AB et NN' N''... une réciprocité remarquable : on va voir, en effet, que la courbe donnée AB est par rapport à la nouvelle courbe NN' N''... un lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R. Soient x'', y'', z'' les coordonnées du centre d'une sphère osculatrice du second ordre d'un rayon égal à R ; elles satisferont aux équations suivantes, qui sont celles de l'intersection de deux plans normaux consécutifs :

$$(17)\quad \begin{cases} (x''-x)\,dx+(y''-y)\,dy+(z''-z)\,dz=0, \\ (x''-x)\,d^2x+(y''-y)\,d^2y+(z''-z)\,d^2z-ds^2=0; \end{cases}$$

si l'on y joint l'équation

$$(18)\qquad (x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2=R^2,$$

ces trois équations détermineront le centre de la sphère qui a, avec la courbe donnée au point (x, y, z), un contact du second ordre. On peut donc regarder x'', y'', z'' comme des fonctions d'une variable indépendante t en fonction de laquelle se trouveraient exprimés x, y, z au moyen des équations de la courbe donnée. L'élimination de t entre les équations (17) et (18) donnerait deux équations en x'', y'', z'' qui seraient celles du lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R.

Cela posé, différentions la première des équations (17) en y regardant toutes les quantités qui y entrent comme des fonctions de t ; nous aurons

$$(x''-x)\,d^2x+(y''-y)\,d^2y+(z''-z)\,d^2z-ds^2+dx''\,dx+dy''\,dy+dz''\,dz=0,$$

d'où l'on tire, en vertu de la deuxième équation (17),

$$(19)\qquad dx''\,dx+dy''\,dy+dz''\,dz=0.$$

On en conclut que les tangentes des deux courbes sont perpendiculaires entre elles; donc la tangente de la nouvelle courbe est située dans le plan normal de la courbe donnée, ou, ce qui revient au même, le plan normal de la courbe donnée est un plan touchant de la nouvelle courbe.

Différentions en second lieu l'équation (18), ce qui donne

$$(x''-x)(dx''-dx)+(y''-y)(dy''-dy)+(z''-z)(dz''-dz)=0;$$

on en conclut, à cause de la première des équations (17),

$$(20)\qquad (x''-x)\,dx''+(y''-y)\,dy''+(z''-z)\,dz''=0,$$

ce qui montre que la tangente de la nouvelle courbe est perpendiculaire au rayon de la sphère qui joint les points (x, y, z), (x'', y'', z''). Dès lors la tangente de la nouvelle courbe se construirait en menant par le point (x'', y'', z''), dans le plan normal de la courbe donnée, une perpendiculaire au rayon qui passe au point (x, y, z). On remarquera que l'équation (20) n'est autre chose que celle du plan normal de la nouvelle courbe où l'on mettrait x, y, z à la place des coordonnées courantes. Si l'on différentie cette équation, on trouvera

$$\begin{aligned}(x''-x)\,d^2x''+(y''-y)\,d^2y''+(z''-z)\,d^2z''\\ +ds''^2-dx\,dx''-dy\,dy''-dz\,dz''=0;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en vertu de l'équation (19),

$$(21)\quad (x''-x)\,d^2x''+(y''-y)\,d^2y''+(z''-z)\,d^2z''+ds''^2=0.$$

Les équations (20) et (21) sont celles de l'intersection de deux plans normaux consécutifs de la nouvelle courbe, où l'on mettrait x, y, z à la place des coordonnées courantes. Il en faut conclure que le point (x, y, z) est, par rapport à la nouvelle courbe, le centre d'une sphère osculatrice du second ordre d'un rayon égal à R : donc les deux courbes sont telles, que chacune est, par rapport à l'autre, un lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R.

On remarquera que le plan normal de chacune de ses courbes contient la tangente de l'autre, et est par conséquent perpendiculaire au plan normal de cette dernière.

Il suit de ce qui précède que la courbe donnée AB est située sur les surfaces polaires des courbes NN′N″..., PP′P″..., et que, si l'on développait ces surfaces, la courbe AB se trouverait transformée en un arc de cercle d'un rayon égal à R. Ces deux surfaces doivent donc coïncider avec les deux surfaces développables passant par la courbe donnée, et que nous avons déterminées directement.

12. On peut déterminer immédiatement les angles de contingence et de torsion de la courbe NN′N″..., car ces angles sont égaux respectivement aux angles de torsion et de contingence de l'arête de rebroussement de sa surface polaire; or cette surface polaire coïncide, d'après ce qui vient d'être démontré, avec l'une des deux surfaces développables passant par la courbe donnée que nous avons déterminées aux nos 3 et 4. Dès lors la formule (13) détermine l'angle de contingence de la courbe NN′N″..., et la formule (14) détermine son angle de torsion. On pourrait au reste déterminer directement ces deux quantités, ce qui fournirait une confirmation de ce qui précède.

Cherchons la longueur d'un arc quelconque de la même courbe : nous avons désigné par ds'' l'élément NN′; abaissons du point M′ sur la droite FN la perpendiculaire M′O. Le point O sera le centre de courbure de la courbe AB au point M′; représentons par H la distance FO. Le triangle NFN′ donne

$$\mathrm{NN'} : \mathrm{NF} :: \sin \mathrm{NFN'} : \sin \mathrm{NN'F};$$

mais du triangle rectangle NM′O on tire

$$\mathrm{NO} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2},$$

par suite

$$\mathrm{NF} = \mathrm{FO} - \mathrm{NO} = \mathrm{H} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2}.$$

De plus, d'après la propriété de la tangente de la courbe NN′N″..., l'élément NN′ est une perpendiculaire à NM′ située dans le plan normal de la courbe AB au point M′. On en conclut que l'angle

$$\mathrm{N'NO} = \mathrm{NM'O}$$

qui n'est autre chose que l'angle désigné plus haut par i, puisque son

cosinus a visiblement pour valeur $\frac{\rho}{R}$; par suite,

$$NN'F = N'NO - NFN' = i - \omega,$$

car l'angle NFN′ est égal à l'angle de torsion de la courbe AB. Portant dans la proportion ces valeurs de NF et des angles NFN′, NN′F, on obtient

$$ds'' : H - \sqrt{R^2 - \rho^2} :: \sin\omega : \sin(i - \omega),$$

d'où l'on tire, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$\sin i\, ds'' = \omega\,(H - \sqrt{R^2 - \rho^2}),$$

ou bien, en mettant pour sin i sa valeur $\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}$,

$$ds'' = \frac{R\omega}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\,(H - \sqrt{R^2 - \rho^2}).$$

Mais nous avons trouvé la relation

$$d\rho = H\omega$$

(*voir* le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, tome VIII, page 381); on en déduit la valeur de H, et l'on trouve

$$ds'' = \frac{R\,d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} - R\omega, \tag{22}$$

d'où

$$s'' + K = R \arcsin\frac{\rho}{R} - R\int\omega,$$

K désignant une constante arbitraire dont la valeur dépendra de l'origine de l'arc s''. Si la courbe donnée était plane, on aurait $\omega = 0$, et le rayon de courbure ρ pourrait être remplacé, à une constante près K′, par l'arc correspondant σ de la développée plane de la courbe, ce qui donnerait la formule

$$s'' + K = \arcsin\frac{\sigma + K'}{R}.$$

Nous avons vu qu'il existe sur la surface polaire de la courbe AB une seconde courbe PP'P''... analogue à la courbe NN'N''..., et qui est aussi un lieu des centres de sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R. Ainsi, au point M' passent deux de ces sphères dont les centres N, P sont situés sur la droite NF et à égale distance du centre O du cercle osculateur. Cette seconde courbe possède d'ailleurs les mêmes propriétés que la première : on verrait sans peine que la formule (22) lui est applicable, sauf le changement de $H - \sqrt{R^2 - \rho^2}$ en $H + \sqrt{R^2 - \rho^2}$; on aura donc, en désignant par ds''' l'élément PP',

$$ds''' = \frac{R\,d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} + R\,\omega.$$

Si l'on ajoute cette équation avec la formule (22), on trouve

$$ds'' + ds''' = \frac{2R\,d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{s'' + s'''}{2} = R \arcsin\frac{\rho}{R} + K'',$$

K'' étant une nouvelle constante arbitraire.

Enfin la formule (22) combinée avec la formule (13) servirait à trouver le rayon de courbure ρ'' de la courbe NN'N''.... On a, en effet,

$$\rho'' = \frac{ds''}{\omega'},$$

puisque ω' est égal à l'angle de contingence de cette courbe; mettant pour ds'' et ω' les valeurs données par les deux formules (22), (13), on trouve

$$\frac{d\rho - \omega\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\sqrt{(d\rho - \omega\sqrt{R^2 - \rho^2})^2 + R^2\varepsilon^2\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^2}}.$$

13. On peut se proposer la question inverse de celle qui a été résolue aux n^os^ **3, 4,** en se donnant une surface développable et cherchant sur cette surface les courbes que son développement transformerait en un arc de cercle de rayon donné. On connaîtra alors la courbe

KK′ K″..., par conséquent ε', ω', et l'on cherchera les équations de la courbe AB; il est aisé de voir que tout dépendra de l'expression de la longueur MK que nous désignerons par l. D'après le n° 8, nous aurons

$$l = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i', \quad \text{d'où} \quad ds = \frac{l\varepsilon'}{\sin i'};$$

portant cette expression dans la formule (15), on trouve

$$dl - l\varepsilon' \cot i' = ds'. \tag{23}$$

D'un autre côté, on a

$$ds = \rho\varepsilon = \mathrm{R}\,\varepsilon \cos i = \mathrm{R}\,(di' + \varepsilon'),$$

ou bien

$$\frac{l\varepsilon'}{\sin i'} = \mathrm{R}\,(di' + \varepsilon'). \tag{24}$$

Les deux équations (23), (24) sont des équations différentielles simultanées du premier ordre par rapport à l et i'; leur intégration fera connaître ces deux quantités dont les expressions contiendront deux constantes arbitraires. Pour effectuer cette intégration, prenons dans l'équation (24) la valeur de l

$$l = \mathrm{R} \sin i' \left(1 + \frac{di'}{\varepsilon'}\right), \tag{25}$$

et portons-la dans l'équation (23), ce qui donne

$$d.\sin i' \left(1 + \frac{di'}{\varepsilon'}\right) - (\varepsilon' + di') \cos i' = \frac{ds'}{\mathrm{R}},$$

ou, en réduisant,

$$d.\sin i' \frac{di'}{\varepsilon'} - \varepsilon' \cos i' = \frac{ds'}{\mathrm{R}},$$

ou bien encore, en posant $\cos i' = u$,

$$d\frac{du}{\varepsilon'} + \varepsilon' u = -\frac{ds'}{\mathrm{R}}. \tag{26}$$

On fera dépendre l'intégration de cette équation de celle de l'équation

$$d\frac{du}{\varepsilon'} + \varepsilon' u = 0;$$

or cette dernière a pour intégrale, en posant $\int \varepsilon' = v$,

$$u = A\cos v + B\sin v;$$

on prendra donc cette même expression pour former l'intégrale de l'équation (26), en y regardant A et B comme variables. On trouvera

$$A = -\frac{1}{R}\int \sin v\, ds' + H, \quad B = \frac{1}{R}\int \cos v\, ds' + H',$$

H, H′ étant deux nouvelles constantes arbitraires, et l'on aura pour l'intégrale de l'équation (26)

$$u \text{ ou } \cos i' = H\cos v + H'\sin v$$
$$-\frac{1}{R}\cos v\int \sin v\, ds' + \frac{1}{R}\sin v\int \cos v\, ds'.$$

On en tirerait

$$\frac{\sin i'\, di'}{\varepsilon'} = H\sin v - H'\cos v$$
$$-\frac{1}{R}\sin v\int \sin v\, ds' - \frac{1}{R}\cos v\int \cos v\, ds';$$

il ne resterait plus qu'à porter cette expression et celle de $\sin i'$ dans l'équation (25); la quantité l serait ainsi exprimée en fonction des données de la question et des constantes H, H′. Si l'on faisait $R = \infty$, l'angle i serait droit, et, d'après la formule (14), on aurait

$$di' + \varepsilon' = 0, \quad \text{d'où} \quad i' = -\int \varepsilon' + K,$$

K étant une constante arbitraire; on porterait cette expression de i' dans l'équation (23) qui est linéaire et du premier ordre par rapport à l, et dont l'intégration ferait connaître l.

14. Cela posé, soient

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z),$$

les équations de la courbe donnée KK′ K″... ; les équations de la tangente KM menée au point K, pour lequel $z = \alpha$, seront

$$x - \varphi\alpha = (z - \alpha)\,\varphi'\alpha, \quad y - \psi\alpha = (z - \alpha)\,\psi'\alpha,$$

et l'on pourra supposer que x, y, z sont les coordonnées du point M de la courbe cherchée AB. On a en outre

$$l^2 = (x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \alpha)^2,$$

équation dans laquelle il faudra remplacer l par l'expression qui vient d'être trouvée, laquelle sera une fonction de α. On n'aura donc qu'à éliminer α entre ces trois équations, et l'on arrivera à deux équations en x, y, z qui seront celles de la courbe AB. Les constantes H, H′ pourraient être déterminées en exprimant que cette courbe doit passer par un point donné sur sa surface.

Les angles de contingence et de torsion de la courbe AB se détermineront sans difficulté. Le triangle sphérique considéré plus haut donne

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B ;$$

or de la formule (14) combinée avec la relation $b - a = \varepsilon \cos i$, on tire

$$a = b - di' - \varepsilon' = \pi - (i' + di' + \varepsilon').$$

Portant dans la relation précédente cette valeur de a et celles de b, C, B trouvées aux n^{os} **6** et **7**, on obtient

$$\cot i' \sin (i' + di' + \varepsilon') = \cos\omega' \cos (i' + di' + \varepsilon') + \sin\omega' \cot (i + di + \omega),$$

ou bien, en négligeant les infiniment petits du second ordre et d'un ordre plus élevé,

$$\frac{\cos^2 i'}{\sin i'}(di' + \varepsilon') = -(di' + \varepsilon')\sin i' + \omega' \cot i,$$

d'où

$$di' + \varepsilon' = \omega' \cot i \sin i'.$$

La formule (14) combinée avec cette dernière donne

$$\omega' \sin i' = \varepsilon \sin i ;$$

ajoutant le carré de cette relation et celui de la formule (14), on trouve

$$\varepsilon^2 = (di' + \varepsilon')^2 + \omega'^2 \sin^2 i';$$

comme l'angle i' est connu, cette formule déterminera ε; ε étant connu, on déduira cos i de la formule (14); enfin les quantités ε, i, i' étant connues, on déduira ω de la formule

$$\varepsilon \cot i' = -\frac{di + \omega}{\sin i}.$$

NOTE

SUR

LES FACTEURS ÉGAUX DE POLYNOMES ENTIERS;

PAR M. OSTROGRADSKI.

[Extrait des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris, tome XLII, page 980. — Séance du 19 mai 1856.]

Désignons respectivement par X, P, Q, R un polynôme entier de la variable x, le plus grand diviseur commun à ce polynôme et à sa dérivée $\frac{dX}{dx}$ et les quotients

$$\frac{X}{P}, \quad \frac{\frac{dX}{dx}}{P}.$$

Le plus grand diviseur commun aux polynômes Q et $R - \frac{dQ}{dx}$ est précisément le produit des facteurs simples du polynôme X; soient q, Q_1 et R_1 ce produit et les quotients

$$\frac{Q}{q}, \quad \frac{R - \frac{dQ}{dx}}{q}.$$

Le plus grand diviseur commun aux polynômes

$$Q_1 \quad \text{et} \quad R_1 - \frac{dQ_1}{dx}$$

sera le produit des facteurs doubles de X; désignons par q_1 le produit dont il s'agit, et faisons

$$\frac{Q_1}{q_1} = Q_2, \quad \frac{R_1 - \frac{dQ_1}{dx}}{q_1} = R_2.$$

Le plus grand diviseur commun à Q_2 et $R_2 - \frac{dQ_2}{dx}$ représentera le produit des facteurs triples de X; ainsi de suite.

J'ai démontré ces propositions dans une Note lue à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 10 octobre 1849. Après l'impression de cette Note, j'ai reconnu qu'on peut avoir immédiatement le produit des facteurs du polynôme X, d'un degré quelconque de multiplicité. En effet, les facteurs dont k est le degré de multiplicité, forment le plus grand diviseur commun aux polynômes Q et $R - k\frac{dQ}{dx}$; il n'y aura donc qu'à chercher ce diviseur pour avoir le produit dont il s'agit.

Ainsi le produit des facteurs simples, celui des facteurs doubles, celui des facteurs triples, etc., seront respectivement les plus grands diviseurs communs aux polynômes

$$Q \text{ et } R - \frac{dQ}{dx}, \quad Q \text{ et } R - 2\frac{dQ}{dx}, \quad Q \text{ et } R - 3\frac{dQ}{dx}, \ldots$$

Je supprime la démonstration, qui ne présente aucune difficulté, et même elle devient tout à fait évidente, si l'on représente le polynôme X sous la forme

$$qq_1^2 q_2^3 q_3^4 \ldots$$

MÉMOIRE

SUR

LA RÉDUCTION DE CLASSES TRÈS-ÉTENDUES D'INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

[Extrait par l'auteur.]

Nous empruntons cet Extrait aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences, tome XLII, page 525, séance du lundi 24 mars 1856. Le Mémoire entier, assez volumineux déjà, et qu'on espère augmenter encore par des recherches ultérieures, ne paraîtra que plus tard, et peut-être dans un autre recueil.

« 1. J'ai obtenu à diverses époques et par différentes méthodes des formules pour la réduction de plusieurs classes très-étendues et assez remarquables d'intégrales multiples. Dans des cas particuliers, ces formules fournissent les valeurs finies de quelques intégrales qui paraissent mériter qu'on les signale. Elles conduisent d'ailleurs à la solution de certains problèmes, au premier abord très-difficiles. On les trouvera réunies et discutées dans mon Mémoire. Je ne pourrai, dans cet Extrait, qu'effleurer le sujet, et je m'attacherai de préférence aux formules qui sont liées à l'intégrale

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\,\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1},$$

dont je me suis servi dans un article inséré au *Compte rendu* de la dernière séance [*] pour démontrer la belle formule de Gauss concernant les fonctions Γ. En désignant par R cette intégrale, j'ai prouvé que

[*] *Comptes rendus*, tome XLII, page 501. Au reste, cet article a été inséré aussi dans le présent volume; *voir* page 82.

l'on a

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk}.$$

» **2.** Cela posé, considérons l'intégrale à n variables

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})} \varphi(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}) \alpha_1^{\frac{1}{n}} \alpha_2^{\frac{2}{n}} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} d\alpha\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1},$$

où φ désigne une fonction quelconque, telle pourtant, bien entendu, que l'intégrale garde un sens précis et une valeur déterminée. Désignons cette intégrale par L. En substituant à la variable α une variable nouvelle k, liée à α par la relation

$$\alpha = \frac{k^n}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}},$$

nous aurons de suite

$$\mathrm{L} = n \int_0^\infty \mathrm{R}\, \varphi(k^n)\, k^{n-1}\, dk;$$

et en mettant pour R sa valeur,

$$\mathrm{L} = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-nk} \varphi(k^n)\, k^{n-1}\, dk.$$

L'intégrale donnée à n variables est donc réduite à une intégrale simple. En prenant pour la fonction φ une puissance de la variable, on retrouverait naturellement la formule de Gauss :

$$(\mathrm{A}) \qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\mu).$$

» **3.** On obtient une formule particulière, digne de remarque, en posant

$$\varphi(k^n) = e^{-ak},$$

où a désigne une constante, telle que la somme $n+a$ soit positive. On a alors

$$\varphi(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}) = e^{-a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}},$$

et il vient

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}})} \alpha^{\frac{1}{n}} \alpha_1^{\frac{2}{n}} \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \, d\alpha\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_{n-1}$$

$$= n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(n+a)^n}.$$

» Cette formule peut être démontrée autrement; par exemple, au moyen de développements en séries. D'abord en développant l'exponentielle

$$e^{-a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}}$$

en série suivant les puissances de a, on prouvera que la formule est exacte tant que la valeur absolue de a ne surpasse pas n. Remplaçant ensuite a par $a+h$, et développant suivant les puissances de h, on étendra de proche en proche la limite supérieure de a jusqu'à ∞. La formule dont nous parlons une fois établie, on en déduira, si l'on veut, une démonstration nouvelle de l'équation (A) de Gauss : il suffira de prendre la différentielle à indice quelconque des deux membres et de faire ensuite $a = 0$.

» La constante a de notre formule peut être supposée imaginaire, pourvu que la partie réelle de $n + a$ soit positive. Je profiterai de l'occasion pour faire observer que la constante k de la formule

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk}$$

admet de même des valeurs imaginaires. Dans le premier membre, où k entre à la puissance $n^{ième}$, on peut prendre

$$k^n = \rho (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

pourvu que l'angle θ soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et alors on doit poser, dans le second membre,

$$k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right).$$

Les valeurs extrêmes

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

peuvent être admises; pour elles on a

$$k^n = \pm \rho \sqrt{-1}.$$

» 4. Enfin, dans l'intégrale L, on peut supposer la fonction φ nulle dès que la variable atteint une certaine valeur positive b, cette fonction restant d'ailleurs quelconque pour des valeurs moindres. On reconnaît alors que l'intégrale multiple

$$\int \dots \int e^{-(\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1})} \varphi(\alpha\alpha_1\dots\alpha_{n-1}) \alpha_1^{\frac{1}{n}} \alpha_2^{\frac{2}{n}} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} d\alpha\, d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1},$$

prise pour toutes les valeurs positives de α, α_1, ..., α_{n-1}, qui vérifient l'inégalité

$$\alpha\alpha_1\dots\alpha_{n-1} < b$$

est égale à l'intégrale simple

$$n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^c e^{-nk} \varphi(k^n) k^{n-1}\, dk,$$

où $c = \sqrt[n]{b}$.

» 5. Tout en abrégeant beaucoup, en omettant même de mentionner certaines questions accessoires qui ont de l'intérêt, j'ai pourtant donné quelques développements sur l'intégrale L. Je serai très-bref dans ce qui va suivre.

» L'intégrale à $(n-1)$ variables

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f\left(x+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}\right) \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1},$$

que je désignerai par V, et où k est un paramètre positif, x une variable indépendante, peut être traitée par une méthode semblable à

celle que j'ai employée pour l'intégrale R. En différentiant par rapport à k, puis substituant à la variable α_1 une autre variable α_n liée à α_1 par la relation

$$\alpha_1 = \frac{k^n}{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n},$$

on trouve sans peine que

$$\frac{dV}{dk} = n \frac{dV}{dx}.$$

Donc

$$V = \psi(x + nk).$$

On déterminera la fonction $\psi(x)$ en posant $k = 0$. La valeur de $\psi(x)$ est donc exprimée par l'intégrale

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(x+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}) \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1},$$

que l'on sait réduire à une intégrale simple [*]. On exprimera donc aussi V par une intégrale simple.

» On réduira aisément ensuite à une intégrale double l'intégrale à n variables

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty PQ \alpha_1^{\frac{1}{n}} \alpha_2^{\frac{2}{n}} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} d\alpha\, d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1},$$

où j'ai fait, pour abréger,

$$P = f(\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}),$$

et

$$Q = \varphi(\alpha\, \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}).$$

» En remplaçant α par $a\,\alpha$, α_1 par $a_1\,\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ par $a_{n-1}\,\alpha_{n-1}$, on remplacera la somme des variables, dont P dépend, par une fonction linéaire de ces variables.

» On obtiendra des résultats curieux en supposant que l'une des

---

[*] Voir *Journal de Mathématiques*, 1re série, tome IV, page 229.

fonctions P, Q devient nulle, ou même que toutes deux deviennent nulles, lorsque les variables dont elles dépendent surpassent une limite donnée, ou cessent d'être comprises entre des limites données.

» Enfin, parmi les intégrales dont je me suis occupé, je citerai encore la formule

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + \dots)\,\varphi\left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} + \dots\right) d\alpha\, d\beta \dots,$$

qui se lie aux précédentes. Je renvoie pour le reste à mon Mémoire. De plus longs détails sur ce sujet sortiraient du cadre où l'on doit renfermer les *Comptes rendus*. »

NOTE

SUR

UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES PARTIELLES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

L'équation aux différences finies partielles dont je veux parler est linéaire, mais à coefficients variables; elle se présente dans une question de probabilités dont je ferai plus tard l'objet d'un Mémoire étendu. Aujourd'hui je me borne à une indication rapide du principal résultat de mon analyse.

Il s'agit de déterminer une fonction

$$P_{s,m}$$

à deux indices s et m, en intégrant l'équation

$$P_{s+1,m} = \frac{(m+1)^2}{\mu^2} P_{s,m+1} + \frac{2m(\mu-m)}{\mu^2} P_{s,m} + \frac{(\mu-m+1)^2}{\mu^2} P_{s,m-1},$$

où μ désigne un nombre positif donné. L'indice s de $P_{s,m}$ doit prendre successivement toutes les valeurs 0, 1, 2, 3,..., à l'infini, tandis que m ne peut avoir que celles-ci : 0, 1, 2, 3,..., $\mu-1$, μ; toutefois on admet fictivement les valeurs $m=-1$ et $m=\mu+1$, en prenant $P_{s,-1}=0$ et $P_{s,\mu+1}=0$. Pour $s=0$, on connaît $P_{s,m}$: en d'autres termes, les valeurs des quantités

$$P_{0,0},\ P_{0,1},\ P_{0,2},\ P_{0,\mu}$$

sont données; et la question est d'en conclure la valeur générale de $P_{s,m}$.

Or cette valeur est exprimée par une somme de $(\mu+1)$ produits dont chacun est de la forme

$$F(m)\,a^s,$$

le premier facteur dépendant de m seulement, et le second facteur de s seulement : a est racine d'une équation algébrique déterminée, de degré

$\mu+1$, et le point difficile de la question était surtout de trouver les racines a. J'ai reconnu qu'elles sont données par la formule

$$a=\frac{(\mu-i)^2-i}{\mu^2},$$

en y posant successivement

$$i=0,\quad i=1,\quad i=2,\ldots,\quad i=\mu.$$

J'ai trouvé aussi une expression assez simple du coefficient $F(m)$ qui multiplie a^s et varie avec la racine a.

EXPRESSION REMARQUABLE

DE

LA QUANTITÉ QUI, DANS LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS A LIAISONS QUELCONQUES, EST UN MINIMUM EN VERTU DU PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le principe de la moindre action n'est applicable que dans les systèmes où l'intégrale des forces vives a lieu. Soient donc m, m', m'',..., les masses des points matériels qui forment un système donné remplissant cette condition, v, v', v'',... leurs vitesses, $\sum mv^2$ la force vive totale, et U la fonction des forces. L'intégrale des forces vives pourra s'écrire

$$\sum mv^2 = 2(U + K).$$

K étant une constante qui dépend de la force vive initiale. Nous supposons cette constante déterminée, et nous suivons le système depuis son départ d'une certaine position (1) jusqu'à son arrivée à une autre position (2). Dans la position (1) la force vive est connue par hypothèse, et dès lors dans la position (2), comme dans toutes les autres, elle peut se calculer au moyen de la fonction des forces.

Soit ds l'élément décrit pendant l'instant infiniment petit dt par le point matériel m. On aura

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Substituant cette valeur dans l'intégrale des forces vives, on en tirera ensuite

$$dt = \sqrt{\frac{\Sigma m ds^2}{2(U + K)}},$$

ce qui permettra d'éliminer partout où on le jugera convenable l'élément dt du temps.

La quantité que l'on considère dans le principe de la moindre action est l'intégrale, prise depuis la position (1) jusqu'à la position (2), de la somme des produits $mvds$ de la quantité de mouvement de chaque point matériel par l'élément ds qu'il décrit pendant chaque instant dt sur sa trajectoire. C'est donc

$$\int \sum mvds,$$

ou

$$\int dt \sum mv^2$$

en remplaçant ds par vdt. Mais pour se faire une idée vraiment nette du principe dont nous parlons, il faut remplacer $\sum mv^2$ et dt par leurs valeurs ci-dessus. On a de cette manière

$$dt \sum mv^2 = \sqrt{2(U + K) \sum mds^2};$$

et c'est l'intégrale de cette dernière quantité

$$\sqrt{2(U + K) \sum mds^2}$$

que le principe de la moindre action concerne proprement. Il faut comparer la valeur qu'elle prend dans le mouvement réel qui transporte le système de la position (1) à la position (2) aux valeurs qu'elle pourrait prendre dans tout autre mouvement fictif propre à effectuer ce même transport. Imaginons qu'on ait exprimé les coordonnées des divers points du système au moyen d'un certain nombre de variables indépendantes α, β,..., γ, de manière à vérifier les équations de condition fournies par les liaisons : α, β,..., γ varieront ensemble dans le passage tel qu'il s'opère en effet, de la position (1) pour laquelle on a

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \ldots, \quad \gamma = \gamma_1,$$

à la position (2) pour laquelle

$$\alpha = \alpha_2, \quad \beta = \beta_2, \ldots, \quad \gamma = \gamma_2.$$

On pourra regarder ces quantités comme des fonctions de l'une d'elles α, en sorte que

$$\beta = f(\alpha), \ldots, \quad \gamma = f(\alpha).$$

Les fonctions $f, \ldots, f$ dépendent, je le répète, de la loi du mouvement

qui s'exécute; elles sont parfaitement déterminées. En mettant pour $\beta\ldots, \gamma$ leurs valeurs en α dans la quantité

$$\sqrt{2(U+K)\sum m ds^2},$$

cette quantité prendra la forme

$$\lambda(\alpha)\,d\alpha,$$

et son intégrale sera

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\lambda(\alpha)\,d\alpha.$$

Maintenant, dans cette même quantité

$$\sqrt{2(U+K)\sum m ds^2},$$

faisons

$$\beta=\varphi(\alpha),\ldots,\quad \gamma=\psi(\alpha),$$

les fonctions $\varphi,\ldots,\psi$ donnant toujours $\beta=\beta_1,\ldots,\gamma=\gamma_1$ pour $\alpha=\alpha_1$, et $\beta=\beta_2,\ldots,\ \gamma=\gamma_2$ pour $\alpha=\alpha_2$, mais étant d'ailleurs différentes de $f,\ldots,f$, et répondant par conséquent, non plus au mouvement réel, mais à un mouvement fictif, entre les mêmes positions extrêmes. Nous aurons une autre différentielle

$$\varpi(\alpha)\,d\alpha$$

et une autre intégrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varpi(\alpha)\,d\alpha.$$

Or le principe de la moindre action consiste en ce que l'intégrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\lambda(\alpha)\,d\alpha$$

est moindre que toutes les autres

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varpi(\alpha)\,d\alpha;$$

ou plutôt, il consiste en ce que c'est pour $\beta=f(\alpha),\ldots,\ \gamma=f(\alpha)$ que l'intégrale de

$$\sqrt{2(U+K)\sum m ds^2},$$

prise de la position (1) à la position (2), a une variation nulle, les varia-

tions provenant du changement des fonctions par lesquelles on exprime arbitrairement $\beta, \ldots, \gamma$ en fonction de α dans l'intervalle indiqué.

Cela posé, je me propose de mettre la quantité

$$2(1 + K)\sum mds^2,$$

dont la racine carrée figure dans l'énoncé précédent, sous une forme remarquable de laquelle naîtront des conséquences intéressantes et des théorèmes nouveaux.

Les coordonnées des points m, m', m'',... du système étant exprimées au moyen des variables indépendantes $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, il est clair que

$$\sum mds^2$$

est une fonction homogène du second degré des différentielles $d\alpha$, $d\beta, \ldots, d\gamma$. Représentons donc sa valeur par

$$E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2 + 2H d\alpha d\gamma + \ldots.$$

Comme elle est essentiellement positive, on pourra la mettre sous la forme d'une somme de carrés :

$$(P d\alpha + Q d\beta + \ldots + R d\gamma)^2 + (P' d\alpha + Q' d\beta + \ldots + R' d\gamma)^2 + \ldots,$$

P, Q, etc., étant comme E, F, etc., des fonctions de $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$.

Désignons par $p, q, \ldots, r$, $p', q', \ldots, r'$, etc., d'autres fonctions de $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ liées à P, Q, etc., au moyen d'équations de deux formes distinctes, les unes à lettres semblables,

$$\begin{aligned} Pp + P'p' + \ldots &= 1, \\ Qq + Q'q' + \ldots &= 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ Rr + R'r' + \ldots &= 1, \end{aligned}$$

ayant pour second membre l'unité, et les autres à lettres dissemblables,

$$\begin{aligned} Pq + P'q' + \ldots &= 0, \\ Pr + P'r' + \ldots &= 0, \\ Qp + Q'p' + \ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

dont le second membre est zéro. On peut toujours satisfaire à ces équations, dont on verra plus bas l'origine.

Posons

$$\begin{aligned}
&P\,d\alpha + Q\,d\beta + \ldots + R\,d\gamma = l,\\
&P'\,d\alpha + Q'\,d\beta + \ldots + R'\,d\gamma = l',\\
&P''\,d\alpha + Q''\,d\beta + \ldots + R''\,d\gamma = l'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&p\,\frac{d\theta}{d\alpha} + q\,\frac{d\theta}{d\beta} + \ldots + r\,\frac{d\theta}{d\gamma} = n,\\
&p'\,\frac{d\theta}{d\alpha} + q'\,\frac{d\theta}{d\beta} + \ldots + r'\,\frac{d\theta}{d\gamma} = n',\\
&p''\,\frac{d\theta}{d\alpha} + q''\,\frac{d\theta}{d\beta} + \ldots + r''\,\frac{d\theta}{d\gamma} = n'',\\
&\ldots\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

θ désignant une fonction de α, β,..., γ. D'après la manière dont nous avons défini les coefficients p, q,..., r, p', q',..., r',..., on aura

$$nl + n'l' + n''l'' + \ldots = d\theta,$$

car c'est en exprimant que le premier membre égale identiquement le second membre développé

$$\frac{d\theta}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{d\theta}{d\beta}\,d\beta + \ldots,$$

que l'on obtient entre p, q,... et P, Q,... les relations admises plus haut.

Actuellement prenons pour θ une solution *complète* de l'équation aux différences partielles

$$\left(p\frac{d\theta}{d\alpha}+q\frac{d\theta}{d\beta}+\ldots+r\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2+\left(p'\frac{d\theta}{d\alpha}+q'\frac{d\theta}{d\beta}+\ldots+r'\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2+\ldots=2(U+K),$$

c'est-à-dire de l'équation

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + \ldots = 2(U + K).$$

Cela étant, et puisque déjà l'on a

$$\sum m ds^2 = l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots,$$

le produit

$$2(U + K)\sum m ds^2$$

deviendra

$$(n^2 + n'^2 + n''^2 + \ldots)(l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots),$$

par suite

$$(nl + n'l' + n''l'' + \ldots)^2 + (nl' - ln')^2 + (nl'' - ln'')^2 + (n'l'' - l'n'')^2 + \ldots,$$

ou enfin

$$(d\theta)^2 + (nl' - ln')^2 + (nl'' - ln'') + (n'l'' - l'n'')^2 + \ldots.$$

Les carrés qui viennent après $(d\theta)^2$ s'annulent tous si l'on pose

$$\frac{l}{n} = \frac{l'}{n'} = \frac{l''}{n''} = \ldots.$$

D'après les valeurs de l, l', l'',..., n, n', n'',..., les équations que je viens d'écrire sont des équations différentielles du premier ordre qui donneraient par l'intégration les valeurs de α, β,..., γ en fonction de l'une de ces variables, α par exemple. *Or si vous les joignez à l'intégrale des forces vives, vous aurez précisément ce que M. Hamilton nomme les intégrales intermédiaires des équations différentielles du second ordre, que la mécanique analytique fournit pour le mouvement du système de points matériels dont nous nous occupons.* Nos équations du *premier ordre* ne sont qu'en même nombre que ces équations du *second ordre* : aussi contiennent-elles, outre la constante K, les constantes arbitraires A, B, etc., que θ doit renfermer pour fournir une solution complète de l'équation aux différences partielles

$$\left(p\frac{d\theta}{d\alpha} + q\frac{d\theta}{d\beta} + \ldots + r\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2 + \ldots = 2(U + K).$$

En les différentiant, et éliminant les constantes K, A, B, etc., on retrouverait les équations du second ordre, telles que Lagrange les a données. C'est ce qu'on pourrait vérifier sans peine: mais il est plus simple encore d'établir directement nos équations du premier ordre par le principe même de la moindre action, en profitant de la forme commode que nous venons de donner à l'expression de la quantité

$$\sqrt{2(U + K)\sum mds^2},$$

dont l'intégrale doit être un minimum, ou plutôt doit avoir une variation nulle en vertu de ce principe.

On fera qu'il en soit ainsi, en posant les équations

$$\frac{l}{n} = \frac{l'}{n'} = \frac{l''}{n''} = \ldots,$$

parce que $d\theta$ étant une différentielle exacte, la variation de son intégrale entre des limites fixes est égale à zéro. On n'a du reste aucun besoin de recourir ici aux règles du calcul des variations, et tout peut s'obtenir *sans calcul,* par un raisonnement facile qui s'offre de lui-même. Toutefois, pour être entièrement clair et rigoureux, il faudrait entrer à ce sujet dans quelques explications. Mais, dans le désir d'abréger, j'abandonne pour le moment ces détails à la sagacité du lecteur. J'y reviendrai dans une autre occasion. J'ajoute seulement que les conditions exigées aux limites, savoir que

$\beta = \beta_1, \ldots, \ \gamma = \gamma_1$ pour $\alpha = \alpha_1$, et $\beta = \beta_2, \ldots, \ \gamma = \gamma_2$ pour $\alpha = \alpha_2$,

seront remplies en disposant pour cela des constantes arbitraires introduites par l'intégration des équations différentielles

$$\frac{l}{n} = \frac{l'}{n'} = \frac{l''}{n''} = \ldots,$$

et des constantes A, B,..., que la fonction θ contient, comme nous l'avons déjà remarqué.

Un théorème de Jacobi permet de passer aisément des intégrales *intermédiaires* d'un problème de dynamique aux intégrales finales entre les seules variables $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. Je me borne à écrire ces intégrales finales, qui sont

$$\frac{d\theta}{d\mathrm{A}} = \mathrm{A}', \qquad \frac{d\theta}{d\mathrm{B}} = \mathrm{B}', \qquad \text{etc.}$$

Pour déterminer $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ en fonction de t, on y joindra l'intégrale des forces vives qui donne dt, et par suite t, au moyen d'une quadrature, quand on a exprimé $\beta, \ldots, \gamma$ en α. C'est ainsi qu'il faudra nécessairement opérer, si la fonction θ n'a été obtenue que pour une valeur donnée de K. Mais si K reste dans θ sous forme algébrique, on obtiendra t au moyen de la dérivée partielle de θ par rapport à K.

En voilà assez sur ce sujet. Au fond je ne me proposais qu'un seul but, et il est atteint : je voulais appeler l'attention des géomètres sur l'expression curieuse

$$(d\theta)^2 + (nl' - ln')^2 + \ldots,$$

que j'ai trouvée pour le produit

$$2(\mathrm{U} + \mathrm{K}) \sum mds^2,$$

et qui rendant, pour ainsi dire, intuitives les propriétés de l'intégrale à laquelle le principe de la moindre action se rapporte, ouvre les voies

à une étude plus approfondie. On comprendra aisément qu'on peut en tirer un théorème nouveau de *minimum* concernant la quantité

$$2(U+K)\sum mds^2,$$

si, partant d'une position $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ pour aller à une autre position infiniment voisine, et prenant $d\theta$ constante, on veut rendre l'expression citée la plus petite possible; les valeurs de $d\alpha, d\beta, \ldots, d\gamma$ propres au minimum seront évidemment fournies par les équations de la Dynamique

$$\frac{l}{n} = \frac{l'}{n'} = \frac{l''}{n''} = \ldots,$$

et par celle qui exprime que $d\theta$ a la valeur assignée; de même, si l'on se donnait la somme

$$(d\theta)^2 + (nl' - ln')^2 + \ldots,$$

c'est encore aux équations

$$\frac{l}{n} = \frac{l'}{n'} = \frac{l''}{n''} = \ldots$$

qu'il faudrait recourir pour rendre $d\theta$ un maximum.

J'ai développé longuement cette théorie dans mon cours au Collége de France (année scolaire 1852-1853). Mais elle m'était connue, et je l'avais communiquée à plusieurs de mes amis longtemps avant cette époque. L'idée d'introduire la fonction θ pour exprimer

$$2(U+K)\sum mds^2$$

par une somme de carrés dont le premier ait pour racine une différentielle exacte, m'est venue en lisant (en 1847) un Mémoire manuscrit de M. Schlaefli [*], professeur à l'université de Berne, où ce géomètre distingué donnait une forme semblable au carré de l'élément de longueur d'une ligne géodésique sur l'ellipsoïde. Je suis heureux de reconnaître ce que je dois à M. Schlaefli et de rendre hommage à son haut mérite. Toutefois sa méthode est fort différente de la mienne, et moins générale. Je ne sache pas, en effet, que M. Schlaefli ait jamais songé à se servir de la fonction θ et de l'équation aux différences partielles qu'elle vérifie. Cette fonction, dont l'importance est connue aujourd'hui de tous les géomètres, grâce aux travaux de M. Hamilton et de Jacobi, joue au contraire dans ma méthode le plus grand rôle.

[*] *Voir* un extrait de ce Mémoire, *Comptes rendus*, tome XXV, page 391. *Voir* aussi le Journal de *Crelle*, tome XLIII, page 23.

SUR LA

RÉFLEXION TOTALE DE LA LUMIÈRE

EXTÉRIEUREMENT A LA

SURFACE DES CRISTAUX BIRÉFRINGENTS;

PAR M. H. DE SENARMONT.

§ I.

La forme qu'affectent les ondes lumineuses, lorsqu'elles se propagent dans les milieux biréfringents, est aujourd'hui si connue dans toutes ses particularités, qu'il est peu de phénomènes dépendants de la double réfraction dont on n'ait d'avance déterminé les lois géométriques par la théorie de Fresnel.

Les questions de ce genre ne sont qu'un exercice d'analyse, pour lequel chacun peut se faire des méthodes plus ou moins élémentaires, et le problème que je traite dans cette Note ne mériterait pas plus que tout autre une mention spéciale, s'il ne conduisait à des conséquences simples et pratiquement réalisables, et à tout un système d'expériences qui offrent une sorte de représentation graphique des propriétés les plus caractéristiques de la surface de l'onde.

§ II.

Tout rayon de lumière naturelle, tombant sur un cristal, peut être considéré comme composé de deux faisceaux polarisés à angle droit, et devant fournir l'un le rayon ordinaire, l'autre le rayon extraordinaire.

Or ces deux faisceaux obéissent, en pénétrant dans le milieu cristallisé, à des lois différentes. Si donc celui-ci est moins réfringent que le milieu non cristallisé duquel ils sortent, ils n'arriveront pas en même temps à la réfraction limite qui précède immédiatement la réflexion totale, et chacun d'eux l'atteindra sous une incidence différente.

A chacun d'eux par conséquent correspondra un iris de réflexion totale distinct et séparé.

Je me propose de déterminer les circonstances conditionnelles et la forme de ces iris et des cônes de rayons incidents auxquels ils servent de base, lorsque ces rayons divergent d'un foyer extérieur au cristal, et que ce cristal est limité par une surface plane.

§ III.

Cristaux à un axe optique.

Soient v la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu extérieur au cristal, a^2 et b^2 les coefficients d'élasticité principale parallèlement et perpendiculairement à l'axe optique, θ l'inclinaison de cet axe optique sur la normale à la face d'entrée. L'axe des X sera dirigé suivant cette normale, l'axe des Y dans la section principale, l'axe des Z perpendiculairement à cette section, λ_o, μ_o, ν_o, λ_e, μ_e, ν_e sont respectivement les coordonnées angulaires des rayons ordinaires et extraordinaires, L_o, M_o, N_o, L_e, M_e, N_e les coordonnées angulaires des rayons incidents correspondants.

On a d'abord, en vertu de la loi de Descartes, pour déterminer la direction du rayon ordinaire,

$$\frac{\cos n_o}{\cos l_o} = \frac{\cos N_o}{\cos L_o}, \qquad \frac{\sin L_o}{\sin l_o} = \frac{v}{b},$$

puis, en vertu de la loi de Huyghens, et conformément aux formules établies par Malus, si l'on pose

$$A = a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta, \quad B = (b^2 - a^2) \sin\theta \cos\theta,$$

on aura, pour déterminer la direction du rayon extraordinaire,

$$\frac{\cos n_e}{\cos l_e} = \frac{a^2 \cos N_e}{(A v^2 - A a^2 \cos^2 N_e - a^2 b^2 \cos^2 M_e)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\cos m_e}{\cos l_e} = \frac{a^2 b^2 \cos N_e}{A (A v^2 - A a^2 \cos^2 N_e - a^2 b^2 \cos^2 M_e)^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{A};$$

et comme, dans le cas de la réfraction limite, pour l'un et l'autre rayon,

$$\sin^2 l_o = 1, \quad \cos^2 l_e = 0,$$

on a, pour déterminer les directions des rayons incidents qui correspondent à ce phénomène,

$$v^2 \cos^2 L_o + (v^2 - b^2) \cos^2 M_o + (v^2 - b^2) \cos^2 N_o = 0,$$

$$v^2 \cos^2 L_e + \left(v^2 - \frac{a^2 b^2}{A}\right) \cos^2 M_e + (v^2 - a^2) \cos^2 N_e = 0.$$

Ces rayons sont donc distribués, les uns sur un cône de révolution autour de l'axe des X normal a la face d'entrée; les autres sur un cône du second degré, qui a pour axes principaux la même normale et les deux autres axes coordonnés.

Si l'on combine les deux équations précédentes par soustraction,

$$b^2 \cos^2 \theta \cos^2 M + (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \cos^2 N = 0,$$

satisfaite seulement par

$$\cos^2 \theta = 0, \quad \cos^2 N = 0,$$

ces cônes n'ont donc pas d'autre point commun que leur sommet, à moins que le plan réfringent ne soit parallèle à l'axe optique; alors ils ont deux génératrices communes dans la section principale, et se touchent par conséquent suivant ces génératrices.

On a

$$\frac{a^2 b^2}{A} = a^2 \frac{b^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} = b^2 \frac{a^2}{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 \theta}.$$

Donc toutes les fois que $a^2 > b^2$, ou, en d'autres termes, toutes les fois que le cristal est répulsif, on a

$$\frac{a^2 b^2}{A} \leq a^2, \quad \frac{a^2 b^2}{A^2} \geq b^2.$$

Toutes les fois que $a^2 < b^2$ ou que le cristal est attractif, on a

$$\frac{a^2 b^2}{A} \geq a^2, \quad \frac{a^2 b^2}{A} \leq b^2.$$

Il résulte de là que pour un cristal répulsif si

$$v^2 < \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^2 \theta < \frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 - v^2}{v^2 - b^2},$$

on a *à fortiori*

$$v^2 < a^2.$$

Le cône du second degré est donc à base elliptique; le plus petit axe de cette ellipse est constant, quelle que soit la valeur de θ, et perpendiculaire à la section principale. Le plus grand axe est dans le plan de cette section. L'excentricité de l'ellipse devient nulle quand $\sin^2\theta = 0$, pour une face d'entrée perpendiculaire à l'axe optique; elle prend sa plus grande valeur quand $\sin^2\theta = 1$, pour une face d'entrée parallèle à cet axe.

Si

$$v^2 = \frac{a^2 b}{A} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^2\theta = \frac{b^2}{a^2}\frac{a^2 - v^2}{v^2 - b^2},$$

on a

$$v^2 < a^2.$$

Le cône du second degré se change en deux plans parallèles à l'axe des Y, également inclinés de part et d'autre de l'axe des X.

Si

$$v^2 > \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^2\theta > \frac{b^2}{a^2}\frac{a^2 - v^2}{v^2 - b^2},$$

et qu'on ait en même temps

$$v^2 < a^2,$$

le cône du second degré est à base hyperbolique avec l'axe imaginaire de l'hyperbole dans le plan de la section principale.

Il est facile de voir que le cône de révolution, correspondant aux rayons ordinaires, sera toujours extérieur au cône à base elliptique des rayons extraordinaires, et cessera de subsister dès que ce dernier cesse d'être à base elliptique.

Il résulte encore de là que, pour un cristal attractif, si

$$v^2 < \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^2\theta < \frac{b^2}{a^2}\frac{v^2 - a^2}{b^2 - v^2},$$

et qu'on ait en même temps

$$v^2 > a^2,$$

le cône du second degré est à base hyperbolique, l'axe des Y étant l'axe réel de l'hyperbole.

Si

$$v^2 < \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^2\theta < \frac{b^2 v^2 - a^2}{a^2 b^2 - v^2},$$

et qu'on ait en même temps

$$v^2 = a^2,$$

le cône du second degré se change en deux plans normaux à l'axe des Y, également inclinés de part et d'autre de l'axe des X.

Si

$$v^2 < \frac{a^2 b^2}{A} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^2\theta < \frac{b^2 v^2 - a^2}{a^2 b^2 - v^2},$$

et qu'on ait en même temps

$$v^2 < a^2,$$

le cône du second degré est à base elliptique, le plus grand axe de l'ellipse est constant, quelle que soit la valeur de θ, et perpendiculaire à la section principale. Le plus petit axe est dans le plan de cette section. L'excentricité devient nulle quand $\sin^2\theta = 0$, pour une face d'entrée perpendiculaire à l'axe optique; elle prend sa plus grande valeur quand $\sin^2\theta = 1$, pour une face d'entrée parallèle à cet axe.

Il est facile de voir que le cône de révolution, correspondant aux rayons ordinaires, sera constamment, et dans tous les cas, intérieur au cône du second degré, quelles que soient ses transformations.

§ IV.

Il serait sans doute difficile d'appliquer la même méthode aux cristaux à deux axes optiques; et si l'on cherchait à déterminer les conditions de la réfraction limite, quelle que soit la direction du plan réfringent, les expressions analytiques deviendraient d'une complication extrême.

On ne s'occupera ici que du cas plus simple où le plan réfringent est parallèle à l'une des sections principales de la surface de l'onde.

Soient les axes des X, des Y et des Z dirigés suivant les trois axes principaux d'élasticité, a^2, b^2, c^2, les trois coefficients d'élasticité principale suivant ces axes. On supposera

$$a > b > c.$$

Soient λ, μ, ν les coordonnées angulaires d'un rayon lumineux intérieur au cristal, et ρ la vitesse de propagation de la lumière estimée suivant sa direction. l, m, n seront les coordonnées angulaires de la vitesse de propagation normale de l'onde plane correspondante, et r la vitesse de cette propagation, estimée suivant la normale à l'onde plane.

La théorie de Fresnel donne, entre ces quantités, les relations suivantes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, tome VIII, page 371) :

$$(1)\qquad \frac{a^2\cos^2\lambda}{\rho^2-a^2}+\frac{b^2\cos^2\mu}{\rho^2-b^2}+\frac{c^2\cos^2\nu}{\rho^2-c^2}=0,$$

$$(2)\qquad \frac{\cos^2 l}{r^2-a^2}+\frac{\cos^2 m}{r^2-b^2}+\frac{\cos^2 n}{r^2-c^2}=0.$$

$$(3)\qquad \frac{\rho\cos\lambda}{\rho^2-a^2}=\frac{r\cos l}{r^2-b^2},\quad \frac{\rho\cos\mu}{\rho^2-b^2}=\frac{r\cos m}{r^2-b^2},\quad \frac{\rho\cos\nu}{\rho^2-c^2}=\frac{r\cos n}{r^2-c^2}.$$

§ V.

Maintenant, au lieu de passer par les formules générales et très-compliquées qui lient la direction d'un rayon incident et celle des rayons réfractés correspondants, on se bornera à traduire algébriquement la construction géométrique qui détermine la direction de ces rayons réfractés pour le cas particulier où ils restent compris dans la face d'entrée.

§ VI.

Supposons, par exemple, le plan réfringent normal à l'axe des Y de moyenne élasticité. Soit OP la trace du plan d'incidence sur la face d'entrée.

Si l'on prend $\overline{OP}=\frac{v}{\sin M}=\varphi$, qu'on mene PK perpendiculaire à OP et ensuite par PK des plans tangents à la surface de l'onde dont le centre est en O; en joignant le point O aux points de contact, on aurait généralement construit le double rayon réfracté.

Mais dans le cas particulier qui nous occupe, chacun d'eux doit

rester tout entier dans la face d'entrée; il faut donc (les distances OP ayant des valeurs différentes parce que l'incidence n'est pas la même pour les rayons qui éprouvent la réfraction limite ordinaire ou extraordinaire) que deux droites comme PK soient elles-mêmes tangentes à la surface de l'onde, ou a ses courbes d'intersection avec le plan réfringent.

Or les sections de la surface de l'onde par un plan normal à l'axe des Y s'obtiennent en faisant $\cos\mu = 0$ dans l'équation (1); l'équation de ces courbes d'intersection est donc

$$\rho^2 = b^2,$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{c^2} + \frac{\cos^2\nu}{a^2}.$$

Considérons d'abord la section circulaire correspondante aux rayons dits *ordinaires*, et dont l'équation est

$$\rho^2 = b^2. \tag{4}$$

La normale OP se confond avec le rayon vecteur mené au point de contact; on a donc, pour l'équation du lieu géométrique des rayons incidents,

$$v^2 = b^2 \sin^2 M,$$

ou

$$(v^2 - b^2)(\cos^2 L + \cos^2 N) + v^2 \cos^2 M = 0. \tag{5}$$

Considérons ensuite la section elliptique dont l'équation est

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{c^2} + \frac{\cos^2\nu}{a^2}.$$

Soient φ, $\cos\chi$, $\cos\psi$ les coordonnées qui définissent la position du point P; comme OP est la trace du plan d'incidence.

$$\cos L = \sin M \cos\chi, \quad \cos N = \sin M \cos\psi.$$

L'équation de la tangente KP est

$$\frac{1}{\rho\varphi} = \frac{\cos\chi\cos\lambda}{c^2} + \frac{\cos\psi\cos\nu}{a^2}.$$

L'équation de la droite OP normale à cette tangente est

$$\frac{\frac{\cos\chi}{\cos\lambda}}{c^2} = \frac{\frac{\cos\psi}{\cos\nu}}{a^2};$$

de cette dernière équation on tire facilement, à cause des deux précédentes,

$$\rho = \sqrt{c^2\cos^2\chi + a^2\cos^2\psi} = \frac{v}{\sin M};$$

et l'on a, pour l'équation du lieu géométrique des rayons incidents,

$$(6) \qquad (v^2 - c^2)\cos^2 L + (v^2 - a^2)\cos^2 N + v^2\cos^2 M = 0.$$

Ces équations (5) et (6) représentent, la première un cône de révolution autour de la normale à la face d'entrée, l'autre un cône du second degré dont la forme reste à discuter.

Si l'on combine les équations des deux cônes par soustraction

$$(7) \qquad (b^2 - c^2)\cos^2 L + (b^2 - a^2)\cos^2 N = 0,$$

équation des plans passant par l'axe de moyenne élasticité et par les directions des *axes optiques proprement dits* (axes de réfraction conique intérieure, cylindrique extérieure). Les cônes (5) et (6) ont donc quatre génératrices communes comprises deux à deux dans les mêmes plans, quelle que soit la valeur de v^2, ou, en d'autres termes, quelle que soit la forme du cône du second degré.

Les inclinaisons des génératrices des cônes sur leur axe sont données, dans les azimuts des sections principales, par

$$\operatorname{tang}^2 M = \frac{v^2}{b^2 - v^2},$$

$$\operatorname{tang}^2 M_x = \frac{v^2}{c^2 - v^2},$$

$$\operatorname{tang}^2 M_z = \frac{v^2}{a^2 - v^2}.$$

Le cône du second degré est à base elliptique si

$$v^2 < c^2;$$

il se réduit à deux plans parallèles à l'axe des X également inclinés à droite et à gauche de l'axe des Y si

$$v^2 = c^2;$$

il est à base hyperbolique si

$$v^2 > c^2;$$

il subsiste seul et le cône à base circulaire devient imaginaire si

$$v^2 = b^2;$$

enfin les deux cônes deviennent imaginaires, et tout phénomène de réflexion totale disparaît si

$$v^2 > a^2.$$

§ VII.

Si l'on considère un plan réfringent normal à l'axe des X de plus grande élasticité, on trouverait par les mêmes procédés des équations qu'on déduira facilement des premières en échangeant L et M, a et b.

L'équation des lieux géométriques des rayons incidents est alors

$$(v^2 - a^2)(\cos^2 M + \cos^2 N) + v^2 \cos^2 L = 0,$$
$$(v^2 - c^2)\cos^2 M + (v^2 - b^2)\cos^2 N + v^2 \cos^2 L = 0.$$

La condition d'intersection

$$(a^2 - c^2)\cos^2 M + (a^2 - b^2)\cos^2 N = 0$$

est impossible, et les deux cônes n'ont d'autre point commun que leur sommet.

Les incidences principales dans les azimuts des plans coordonnés sont données par

$$\text{tang}^2 L = \frac{v^2}{a^2 - v^2},$$
$$\text{tang}^2 L_y = \frac{v^2}{c^2 - v^2},$$
$$\text{tang}^2 L_z = \frac{v^2}{b^2 - v^2};$$

on verra donc facilement que le cône du second degré est toujours ex-

térieur au cône de révolution. Il est d'ailleurs à base elliptique, se réduit à deux plans parallèles à l'axe des Y et symétriquement inclinés de part et d'autre de l'axe des X, devient à base hyperbolique avec l'axe imaginaire de l'hyperbole parallèle à l'axe des Y, et devient enfin imaginaire, le cône de révolution subsistant seul suivant qu'on a

$$\text{ou} \quad v^2 < c^2 \quad \text{ou} \quad v^2 = c^2,$$

$$\text{ou} \quad v^2 > c^2 \quad \text{ou enfin} \quad v^2 \begin{matrix} = b^2 \\ < \\ > a^2 \end{matrix}$$

§ VIII.

Si l'on considère un plan réfringent normal à l'axe des z de plus petite élasticité, on trouvera de même, *mutatis mutandis*, pour l'équation des cônes,

$$(v^2 - c^2)(\cos^2 \mathrm{L} + \cos^2 \mathrm{M}) + v^2 \cos^2 \mathrm{N} = 0,$$

$$(v^2 - b^2)\cos^2 \mathrm{L} + (v^2 - a^2)\cos^2 \mathrm{M} + v^2 \cos^2 \mathrm{N} = 0,$$

on trouverait comme précédemment que la condition d'intersection est impossible; que le cône du second degré est tout entier intérieur au cône de révolution; qu'il est à base elliptique et coexiste avec le cône de révolution; qu'il est à base elliptique et subsiste seul, le cône de révolution devenant imaginaire; qu'il se réduit à deux plans parallèles à l'axe des X et symétriquement inclinés de part et d'autre de l'axe des Z; qu'il est enfin à base hyperbolique, le grand axe de l'hyperbole étant dirigé suivant l'axe des Y, selon qu'on a

$$\text{ou} \quad v^2 < c^2 \quad \text{ou} \quad v^2 \begin{matrix} = c^2 \\ > b^2 \end{matrix}$$

$$\text{ou} \quad v^2 = b^2 \quad \text{ou} \quad v^2 \begin{matrix} > b^2 \\ < a^2 \end{matrix}$$

§ IX.

Sur un plan réfringent normal à l'axe de moyenne élasticité, la condition de réfraction limite se modifie dans quelques cas singuliers par

certaines restrictions omises jusqu'ici, mais dont il faut nécessairement tenir compte.

§ X.

Il faut remarquer, en effet, que les ombilics de la surface de l'onde sont compris dans le plan réfringent. Or, comme on peut par ce point unique mener une infinité de plans tangents différents à cette surface, il est évident, par les principes du § VI, qu'à un même rayon réfracté correspondent une infinité de plans d'incidence, et par conséquent une infinité de rayons incidents.

Il s'agit de déterminer leur direction.

Or les rayons vecteurs qui aboutissent aux ombilics, intersections du cercle dont l'équation est

$$\rho^2 = b^2,$$

et de l'ellipse dont l'équation est

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{c^2} + \frac{\cos^2\nu}{a^2},$$

sont déterminés par les conditions

$$\rho^2 = b^2,$$

$$\cos^2\lambda = \frac{c^2}{b^2}\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad \cos^2\mu = 0, \quad \cos^2\nu = \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations 3), elles deviennent (en négligeant le double signe pour plus de simplicité, ce qui revient à considérer seulement l'un des rayons ombilicaux),

$$r - \frac{a^2}{r} = -\frac{1}{c}\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}\cos l,$$

$$r - \frac{c^2}{r} = +\frac{1}{a}\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\cos n,$$

d'où

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{r}{b} &= \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n, \\ \frac{b}{r} &= \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n; \end{aligned}$$

d'où l'on tire enfin, sous deux formes différentes, pour l'équation de la surface conique que forment les vitesses de propagation normale en nombre infini correspondantes au rayon ombilical,

$$1-\left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)\times\left(\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)=0,$$

$$\cos^2 m+\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos l-\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)\times\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos l-\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos n\right)=0.$$

Mais lorsqu'on se donne les directions des vitesses de propagation normale intérieures, il est facile d'en déduire la direction des vitesses de propagation normale extérieures, ou, en d'autres termes, la direction des rayons incidents correspondants.

On a, en effet, entre les vitesses de propagation normale intérieures et extérieures les relations suivantes :

1°. Les directions et les vitesses de propagation normale intérieures et extérieures obéissent à la loi des sinus;

2°. Ces directions intérieures et extérieures sont dans le même plan d'incidence;

3°. Les vitesses normales intérieures sont déterminées en fonction de leurs directions, soit par l'équation (2), soit par toute autre relation telle que (8) entre l, n, r.

On a donc, à cause de $\sin m = 1$,

$$\frac{r}{v}=\frac{1}{\sin \mathrm{M}}=\frac{\cos l}{\cos \mathrm{L}}=\frac{\cos n}{\cos \mathrm{N}}; \tag{9}$$

et en éliminant, au moyen de ces équations, dans l'équation (8) r, l, n, on aura, pour déterminer le lieu géométrique du groupe de rayons incidents exceptionnels qui se réunissent en un seul rayon réfracté ombilical,

$$\frac{v^2}{b^2}=\left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos \mathrm{L}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos \mathrm{N}\right)^2. \tag{10}$$

Si l'on appelle Θ l'angle que les rayons incidents font avec l'axe *optique secondaire* (axe de réfraction uniradiale intérieure, conique extérieure); comme cet axe optique secondaire fait avec les axes des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad 0, \quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

on arrive à

$$\cos^2\Theta = \frac{v^2}{b^2}. \tag{11}$$

Pour que cette équation soit réelle, il faut que $v^2 < b^2$. Lorsque cette condition est satisfaite, un système de rayons incidents groupés en faisceau conique de révolution autour de l'axe optique secondaire se réunissent tous, par réfraction, dans une direction commune suivant cet axe.

L'équation (10) du cône peut d'ailleurs se mettre sous les deux formes suivantes :

$$(v^2 - b^2)(\cos^2 L + \cos^2 N)$$
$$+ b^2\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N\right)^2 + v^2\cos^2 M = 0,$$

$$(v^2 - c^2)\cos^2 L + (v^2 - a^2)\cos^2 N$$
$$+ \frac{a^2c^2}{b^2}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L - \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N\right)^2 + v^2\cos^2 M = 0.$$

Si on les combine par soustraction, soit avec l'équation (5) du cône à base circulaire, soit avec l'équation (6) du cône du second degré, on trouve :

1°. Dans le premier cas

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N = 0,$$

équation d'un plan qui passe par l'axe de moyenne élasticité et par l'axe optique secondaire.

2°. Dans le second cas

$$\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos L - \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos N = 0,$$

équation d'un plan qui passe par l'axe de moyenne élasticité et par la seconde génératrice d'intersection du plan réfringent avec la surface conique, que forment les directions de propagation normale, en nombre infini, correspondantes à la direction uniradiale du rayon réfracté.

Les cônes (5) et (6) des rayons incidents n'ont donc que deux génératrices communes avec le cône (10); ils ont tous trois l'axe des Y pour diamètre principal: le dernier cône est donc tangent aux deux premiers, dans toute l'étendue de ces génératrices.

Il est tout entier extérieur aux cônes (5) et (6); de sorte que ses génératrices aboutissent à une région du plan réfringent où les conditions d'une réfraction limite sont généralement dépassées, et où la réfraction s'est changée en réflexion totale.

Si l'on voulait rapporter le cône (10) à ses axes principaux, il faudrait prendre pour nouveaux axes coordonnées :

1°. L'axe des X dirigé suivant l'axe optique secondaire;

2°. L'axe des Y demeuré le même;

3°. L'axe des Z perpendiculaire aux deux premiers.

L'équation (11) devient alors

$$(v^2 - b^2)\cos^2 L' + v^2(\cos^2 N' + \cos^2 M) = 0.$$

L'intersection de ce cône avec la face d'entrée est une hyperbole, et le coefficient angulaire du demi-angle des asymptotes à cette hyperbole est égal à

$$\sqrt{\frac{b^2 - v^2}{v^2}}.$$

§ XI.

Si certains groupes de rayons incidents, tombant dans la région généralement réservée à la réflexion totale, n'y éprouvent cependant, comme on vient de le voir, qu'une réfraction limite; il en est d'autres qui, tombant dans la région de cette réfraction limite, y échappent cependant, et n'éprouvent en réalité que la réfraction ordinaire.

Il faut remarquer en effet (*voyez* § VI) que si

$$\varrho = \frac{v}{\sin M} = b,$$

une même droite, comme PK, est en même temps tangente aux deux sections, elliptique et circulaire, que la face d'entrée détermine dans la surface de l'onde.

Or ces deux points de contact ne sont pas les seuls qu'aurait avec cette surface le plan tangent mené par PK.

Il la touche, au contraire, sur tout le contour d'un cercle, de sorte que l'infinité de droites qui, partant du point O, aboutissent à ce petit cercle, en formant une surface conique, sont autant de rayons réfractés correspondants au rayon incident unique.

Ces rayons réfractés ne sont pas tous compris dans le plan réfringent. Le rayon incident correspondant a donc en réalité subi non une réfraction limite, mais une réfraction ordinaire.

La condition

$$\varphi = \frac{v}{\sin M} = b$$

donne d'abord

$$(v^2 - b^2)(\cos^2 L + \cos^2 N) + v^2 \cos^2 M = 0,$$

puis, à cause de $\varphi = \sqrt{c^2 \cos^2 \chi + a^2 \cos^2 \psi}$ (§ VI),

$$(b^2 - c^2)\cos^2 L + (b^2 - a^2)\cos^2 N = 0;$$

et si l'on compare ces conditions aux équations (5) et (7), on voit que les rayons incidents dirigés suivant les quatre arêtes d'intersection des deux surfaces coniques (5) et (6) sont précisément ceux qui échappent à la réfraction limite pour éprouver la réfraction *conique intérieure* et *cylindrique extérieure*, après leur émergence.

Lorsque la face d'émergence est parallèle à la face d'entrée, la nappe cylindrique des rayons émergents ressort parallèle au rayon incident; ce cylindre émergent et le cône des rayons intérieurs s'appuient sur une même base oblique, située dans la face d'émergence. On peut, au moyen des équations précédentes, déterminer la forme de ce cône intérieur.

Si, au moyen des équations (9), on élimine L, M, N des équations précédentes, on trouve, pour déterminer la direction et la vitesse de la propagation normale intérieure correspondante au rayon incident,

$$r = b,$$
$$(b^2 - c^2)\cos^2 l + (b^2 - a^2)\cos^2 n = 0.$$

Les équations (3) deviennent alors (en négligeant le double signe)

$$\rho - \frac{a^2}{\rho} = -\frac{1}{b}\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}\cos\lambda,$$

$$\rho - \frac{c^2}{\rho} = +\frac{1}{b}\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\cos\nu,$$

d'où

$$\frac{\rho}{b} = \frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos\lambda + \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos\nu,$$

$$\frac{b}{\rho} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos\lambda + \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos\nu,$$

et enfin l'équation du cône intérieur est sous deux formes différentes :

$$1 = \left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos\lambda + \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos\nu\right) \times \left(\frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos\lambda + \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos\nu\right),$$

$$\cos^2\mu + \left(\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos\lambda - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos\nu\right) \times \left(\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos\lambda - \frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos\nu\right) = 0.$$

Il serait facile de démontrer que l'intersection de ce cône avec une face d'émergence parallèle à la face d'entrée est une hyperbole qui a pour première asymptote la direction de l'axe optique proprement dit, pour seconde asymptote la direction de l'axe optique secondaire, de sorte que le demi-angle compris entre ces asymptotes a pour tangente

$$\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{b^2}.$$

On ne s'arrêtera pas à faire voir ici quels phénomènes physiques correspondent à toutes ces propriétés particulières des diverses surfaces coniques

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES D'ANALYSE;

PAR M. E. PROUHET.

(Présenté à l'Académie des Sciences le 8 mars 1852.)

PREMIÈRE PARTIE.

Définition et formation de quelques systèmes combinatoires. — Propriétés qui tiennent à l'ordre et au classement des combinaisons.

1. Si l'on considère mn quantités disposées de la manière suivante :

$$(A)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0^1 \quad a_0^2 \quad a_0^3 \quad a_0^4 \ldots \quad a_0^m, \\ a_1^1 \quad a_1^2 \quad a_1^3 \quad a_1^4 \ldots \quad a_1^m, \\ a_2^1 \quad a_2^2 \quad a_2^3 \quad a_2^4 \ldots \quad a_2^m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}^1 \, a_{n-1}^2 \, a_{n-1}^3 \, a_{n-1}^4 \ldots a_{n-1}^m, \end{array}\right.$$

et qu'on les combine m à m en ayant soin de ne prendre à chaque fois qu'un seul terme dans la même ligne verticale, on aura ce que j'appellerai un *système combinatoire*. Le nombre des éléments de chaque combinaison sera m, et n sera dit la *base* du système.

2. Un système prendra le nom de *système de polynômes* lorsque les éléments de chaque combinaison seront ajoutés les uns aux autres. Ce sera un *système de produits*, si les éléments sont combinés par voie de multiplication successive.

Dans cette première Partie, je traiterai des combinaisons, abstraction faite des opérations qui peuvent lier leurs éléments entre eux.

3. Dans le tableau (A), la lettre a est accompagnée de deux nombres. Je réserverai le nom d'*indice* au nombre inférieur, et celui de *numéro* au nombre supérieur.

Je conviendrai de ranger les éléments de chaque combinaison d'après la grandeur des numéros, en allant toujours du plus petit numéro au plus grand. De cette manière, une combinaison sera déterminée si l'on connaît dans quel ordre les indices s'y succèdent. Aussi représenterons-nous quelquefois une combinaison par les indices de ses éléments écrits dans leur ordre entre parenthèses. Par exemple

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\,\lambda)$$

indiquera la combinaison

$$a^1_\alpha\, a^2_\beta\, a^3_\gamma \ldots\, a^m_\lambda,$$

et représentera le polynôme

$$a^1_\alpha + a^2_\beta + a^3_\gamma + \ldots + a^m_\lambda$$

s'il s'agit d'un système de polynômes.

4. On obtiendra évidemment toutes les combinaisons que nous venons de définir en développant le produit

$$(a^1_0 + a^1_1 + a^1_2 + \ldots + a^1_{n-1})\,(a^2_0 + a^2_1 + a^2_2 + \ldots + a^2_{n-1})\ldots(a^m_0 + a^m_1 + a^m_2 + \ldots + a^m_{n-1})$$

d'où il suit que n^m est le nombre total des combinaisons de m éléments dans le système dont la base est n.

Si plusieurs colonnes du système se répétaient, en sorte qu'il y eût α colonnes d'une espèce, β colonnes d'une autre espèce, etc., toutes les combinaisons *distinctes* du système s'obtiendraient en développant le produit

$$(a^1_0 + a^1_1 + a^1_2 + \ldots + a^1_{n-1})^\alpha\,(a^2_0 + a^2_1 + a^2_2 + \ldots + a^2_{n-1})^\beta \ldots (a^m_0 + a^m_1 + a^m_2 + \ldots + a^m_{n-1})$$

et le coefficient numérique de chaque terme indiquerait combien de fois la combinaison correspondante entre dans le système.

5. Les combinaisons du système (A) peuvent se partager en classes de la manière suivante :

1°. Les combinaisons dans lesquelles la somme des indices est n ou un multiple de n;

2°. Les combinaisons dans lesquelles cette somme est un multiple de n augmenté de 1 ;

3°. Les combinaisons dans lesquelles cette somme est un multiple de n augmenté de 2;

Et ainsi de suite. Il y aura donc en tout n classes, que nous désignerons par les nombres 0, 1, 2,..., $n-1$.

6. Chacune des n classes comprend le même nombre de combinaisons.

En effet, si l'on change dans les combinaisons une fois formées

$$a_0^1,\ a_1^1,\ a_2^1,\ldots,\ a_{n-1}^1$$

respectivement en

$$a_1^1,\ a_2^1,\ a_3^1,\ldots,\ a_0^1,$$

les combinaisons de la classe h se changent en autant de combinaisons distinctes de la classe $h+1$. Il ne peut donc y avoir moins de combinaisons de cette dernière classe que de la précédente. Une permutation inverse montrerait qu'il ne peut y en avoir moins. Donc ce nombre est le même pour chaque classe.

Ainsi chaque classe renferme n^m : n ou n^{m-1} combinaisons.

7. Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que l'on range les combinaisons à la suite les unes des autres, de manière que si l'on vient à effacer les lettres et leurs numéros, en ne laissant subsister que les indices, ceux-ci considérés comme chiffres du système de numération dont la base est n, forment la suite naturelle des nombres de 0 à n^m-1.

Cette disposition aura l'avantage de mettre en évidence les principales propriétés d'un système. Et d'abord on voit que le rang de chaque combinaison indiquera sa classe et sa composition.

Soient, par exemple,

$$n=10 \quad \text{et} \quad m=5.$$

Comme la première combinaison du système est (00000), la 3257^e

sera

$$(03256), \quad \text{ou} \quad a_0^1\ a_3^2\ a_2^2\ a_5^4\ a_6^5,$$

et appartiendra à la 6e classe puisque

$$0 + 3 + 2 + 5 + 6 = 16 \equiv 6 \pmod{10}.$$

Pour avoir la 50e combinaison du système dans lequel $m=3$, $n=4$, il faut préalablement exprimer 49 dans le système de numération dont la base est *quatre*. On trouve 201. La combinaison demandée est donc

$$(201) \quad \text{ou} \quad a_2^1\ a_0^2\ a_1^3.$$

On voit que nos combinaisons forment comme un système de numération, où la valeur des chiffres dépendrait de leur position d'après une loi tout à fait quelconque.

8. Lorsqu'on veut simplement savoir à quelle classe appartiennent les diverses combinaisons d'un système, on peut y parvenir sans être obligé d'exprimer un nombre dans un système de numération inusité.

Pour fixer les idées, supposons que $n = 10$. L'ordre d'une combinaison est alors le reste de la division par 10 du nombre qui indique son rang (la première combinaison étant indiquée par ..0000, la seconde par ..0001, et ainsi de suite). Or ce reste augmente d'une unité quand on passe d'un nombre au suivant, excepté lorsque le premier nombre est terminé par 9, 99, 999, etc. Dans ces derniers cas, le reste de la division par 10 augmente respectivement de 2, 3, 4,..., unités.

D'après cela, pour partager en classes les combinaisons formées dans le système décimal et en les supposant rangées comme il a été dit plus haut (n° **7**), il suffira d'écrire en cercle les chiffres 0, 1, 2,..., 9, et de prendre ces nombres à partir de 0 en suivant le cercle, avec le soin d'avancer d'un rang à chaque tour, de deux rangs à chaque dizaine de tours, de trois rangs à chaque centaine, et ainsi de suite. Ces chiffres, écrits sous les combinaisons au fur et à mesure qu'ils seront lus sur le cercle, indiqueront la classe à laquelle chaque combinaison appartient.

Une règle analogue s'applique évidemment à un système quelconque, et l'on aura, par exemple, dans le cas de $n=3$, $m=3$, le résultat suivant :

Rang de la combinaison.	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15	16, 17, 18	19, 20, 21	22, 23, 24	25, 26, 27
Indice de la classe.	0, 1, 2	1, 2, 0	2, 0, 1	1, 2, 0	2, 0, 1	0, 1, 2	2, 0, 1	0, 1, 2	1, 2, 0

9. Il résulte de cette loi que si l'on s'arrête dans le système à un rang marqué par un multiple de n, on aura jusque-là autant de combinaisons de la classe 0 que de la classe 1, que de la classe 2, etc.

10. Supposons toujours les combinaisons rangées comme il a été dit au n° **7**, et représentées par la suite des nombres (0 compris) exprimés dans le système de numération dont la base est n. Les n^{m-1} premières combinaisons commencent par a_0^1; les n^{m-1} suivantes par a_1^1, et ainsi de suite. Le système se partage donc en n groupes dont chacun renferme n^{m-1} combinaisons dans lesquelles le premier élément est commun.

0 0 0
0 0 1
0 0 2
0 1 0
0 1 1
0 1 2
0 2 0
0 2 1
0 2 2
1 0 0
1 0 1
1 0 2
1 1 0
1 1 1
1 1 2
1 2 0
1 2 1
1 2 2
2 0 0
2 0 1
2 0 2
2 1 0
2 1 1
2 1 2
2 2 0
2 2 1
2 2 2

Chacun de ces groupes partiels peut être regardé comme un système de combinaisons de $m-1$ éléments, et se partage de même en n groupes. Il y aura donc dans tout le système n^2 de ces nouveaux groupes.

Et en général, i étant moindre que m, le système se pourra partager en n^i groupes de n^{m-i} combinaisons ayant les i premiers éléments communs. Chacun de ces groupes constitue un système dont la base est n, mais à $m-i-1$ éléments, en ne considérant que comme un seul élément l'ensemble des $i+1$ premiers, ensemble qui ne peut avoir que n valeurs différentes.

Par exemple, dans le système ternaire que représente le tableau ci-contre, il y a trois groupes principaux, séparés par un trait double, dans lesquels le premier élément est commun; on peut considérer chacun d'eux comme formant un système de même base à 2 éléments. Chacun de ces groupes se subdivise à son tour en trois groupes secondaires dont les combinaisons ne diffèrent que par le dernier élément, et qui peuvent être considérés comme formant des systèmes de même base, mais à 1 seul élément.

11. Prenons, dans le tableau (A), i éléments quelconques appartenant à des colonnes différentes; amenons-les sur la première ligne horizontale, et, par une permutation entre les colonnes, faisons en sorte qu'ils occupent, sur cette ligne, les i premières places. En opérant sur le tableau ainsi modifié comme si chaque élément avait l'indice et le numéro qui convient à sa place actuelle, on formera

encore toutes les combinaisons du système, et quoique l'ordre nouveau soit très-différent du premier, quelques-unes des conséquences précédentes subsisteront encore.

Ainsi les n premières combinaisons ne différant que par le dernier élément, appartiendront à n classes différentes : il en sera de même des n suivantes, etc. ; en s'arrêtant à un rang marqué par un multiple de n, on aura donc encore un nombre égal de combinaisons de chaque classe.

En second lieu, les n^{m-i} premières combinaisons, et elles seront les seules, commenceront par les i éléments considérés : comme n^{m-i} est un multiple de n (à moins que $i = m$), et que, d'ailleurs, rien n'empêche, une fois les combinaisons formées, de mettre chaque élément à la place indiquée par son numéro, on aura le principe suivant.

12. *Dans tout système dont* n *est la base et* m *le nombre des éléments,* i *étant moindre que m, il existe* n^{m-i} *combinaisons également réparties entre les* n *classes, et dans lesquelles* i *indices pris à volonté occupent la même place.*

13. Comme ce principe est important, nous en présenterons une autre démonstration en prenant un exemple particulier.

Supposons qu'on demande combien il y a, dans le système décimal, de nombres de 8 chiffres qui renferment 5 millions 3 mille et 4 centaines.

Si l'on efface dans un nombre qui satisfait à ces conditions les chiffres 5, 3 et 4, il restera un nombre de cinq chiffres ; et réciproquement, un nombre de cinq chiffres étant donné, en y intercalant convenablement les chiffres 5, 3 et 4, on obtiendra un nombre remplissant les conditions demandées.

Par conséquent, il y aura autant de nombres de 8 chiffres où les chiffres 5, 3, 4 occupent des places déterminées, qu'il y a de nombres de 5 chiffres (ooooo compris), c'est-à-dire 10^5.

Si l'on écrit les nombres de huit chiffres qui remplissent ces conditions dans l'ordre croissant, il est visible que les dix premiers appartiendront à des classes différentes : de même les dix suivants, etc.

DEUXIÈME PARTIE.

Des systèmes de polynômes.

§ I.

Propriétés générales des systèmes de polynômes.

14. Avant d'examiner les propriétés des systèmes de polynômes, et afin de ne pas compliquer les énoncés, nous conviendrons de quelques notations.

B, C, D,..., L désigneront des systèmes analogues à A, et qui s'obtiennent en remplaçant dans le tableau A, a par b, c,..., l.

$\sum (\mathrm{ABC}\ldots \mathrm{L})_\mu$ ou $\sum_\mu$: somme des produits obtenus en multipliant entre eux les polynômes de même rang et de la classe μ des systèmes A, B,..., L.

$\sum \mathrm{T}_\mu$: ensemble des termes qui, dans $\sum_\mu$, renferment tous les indices appartenant à un polynôme de la classe μ, numérotés comme dans ce polynôme.

$\sum \mathrm{A}_\mu^i$: somme des puissances $i^{èmes}$ des polynômes de la classe μ et du système A.

$\mathfrak{A}_\mu$: produit de tous les termes d'un polynôme de la classe μ et du système A.

$\mathfrak{A}'_\mu$: produit des termes d'un polynôme de l'ordre μ par l'un des termes de ce polynôme.

Nous désignerons, à l'exemple de plusieurs auteurs, le produit

$$1.2.3\ldots m$$

par Πm.

Les autres notations seront expliquées en leur lieu.

15. Théorème fondamental. — A, B,..., L *désignant i systèmes de polynômes de même base et du même nombre de termes, on a*

$$(1) \qquad \sum (\mathrm{ABC}\ldots \mathrm{L})_\mu = \sum (\mathrm{ABC}\ldots \mathrm{L})_\nu$$

pour $i < m$, *et*

$$(2) \qquad \sum (\mathrm{ABC}\ldots \mathrm{L})_\mu - \sum \mathrm{T}_\mu = \sum (\mathrm{ABC}\ldots \mathrm{L})_\nu - \sum \mathrm{T}_\nu$$

pour $i \leqq m$.

Un terme faisant partie de $\sum_\mu$ peut être représenté par

$$\mathrm{T} = abc\ldots l,$$

chacune de ces lettres ayant un indice et un numéro que nous n'écrivons pas pour plus de simplicité.

Les indices sont i nombres égaux ou inégaux pris parmi ceux qui entrent dans un polynôme de la classe μ : les numéros sont aussi i nombres égaux ou inégaux pris parmi les m nombres 1, 2, 3,..., m.

Or, si l'on suppose d'abord i moindre que m, il existe dans chaque système autant de polynômes de l'ordre μ que de l'ordre ν, où ces i indices sont surmontés des mêmes numéros (**12**). Par conséquent, si le terme T entre un certain nombre de fois dans $\sum_\mu$, il entrera le même nombre de fois dans $\sum_\nu$, ce qui démontre l'égalité (1).

Si l'on a

$$i \leqq m,$$

tous les termes T, où ne se retrouveront pas les m indices d'un polynôme de l'ordre μ, numérotés comme dans ce polynôme, entreront à la fois dans $\sum_\mu$ et dans $\sum_\nu$. Ces deux sommes ne peuvent donc différer que par les termes dont l'ensemble a été désigné par $\sum \mathrm{T}_\mu$ et $\sum \mathrm{T}_\nu$, ce qui démontre l'égalité (2).

16. Lorsqu'une fonction des combinaisons d'une classe (polynômes ou produits) ne changera pas quand on y substituera les combinaisons de même rang de toute autre classe, nous représenterons, pour abréger, cette fonction par le symbole $\vartheta(\mu)$, qui indiquera qu'elle est indépendante de la classe μ. Nos deux égalités

fondamentales pourront donc s'écrire comme il suit :

$$(1) \qquad \sum\nolimits_{\mu} = \delta(\mu), \qquad (i < m),$$

$$(2) \qquad \sum\nolimits_{\mu} - \sum T_{\mu} = \delta(\mu), \qquad (i \leqq m).$$

17. Lorsque i est égal à $m - 2$, les égalités comprises dans la formule (1) se partagent en d'autres plus simples.

En effet, chaque système se compose de n systèmes partiels dans lesquels les polynômes de l'ordre μ et ceux de l'ordre ν forment des classes différentes. Par suite, l'égalité $\sum_{\mu} = \sum_{\nu}$ doit être une conséquence de n égalités semblables, relatives à chacun des systèmes partiels. Une pareille décomposition aurait lieu à fortiori pour $i < m - 2$.

Pour éclaircir tout cela par un exemple, ne considérons qu'un seul système dans lequel $n = 2$, $m = 3$. Ce système pourra être représenté par le tableau suivant :

		Polynômes	Classe.
Système complet.	1er système partiel.	0 0 0	0
		0 0 1	1
		0 1 0	1
		0 1 1	0
	2e système partiel.	1 0 0	1
		1 0 1	0
		1 1 0	0
		1 1 1	1

La supposition de $i = 1$ dans l'égalité (1) donne

$$(000) + (011) + (101) + (110) = (001) + (010) + (100) + (111).$$

Or cette égalité est une conséquence des deux suivantes :

$$(000) + (011) = (001) + (010),$$
$$(101) + (110) = (100) + (111),$$

égalités qui sont relatives aux deux systèmes partiels dans lesquels le système complet se décompose.

18. Corollaire I. — *Si les systèmes* A, B, C,..., L *sont identiques, on aura les formules*

$$(3) \qquad \sum A_\mu^{m-i} = \delta(\mu),$$

$$(4) \qquad \sum A_\mu^{m} - \Pi m \sum \alpha b_\mu = \delta(\mu),$$

$$(5) \qquad \sum A_\mu^{m+1} - \frac{\Pi(m+1)}{2} \sum \alpha b'_\mu = \delta(\mu),$$

conséquences immédiates du théorème fondamental et des formules qui servent à développer les puissances des polynômes.

19. Les formules (4) et (5) sont déduites de la formule (2) en y faisant $i = m$ et $i = m+1$. Le développement de T_μ en fonction symétrique des termes de A_μ devenant de plus en plus compliqué à mesure que i augmente, nous nous contenterons toujours de ces deux cas particuliers.

Toutefois ce développement, quand on ne considère qu'un seul système, peut être prolongé autant que l'on veut en ayant égard à la règle suivante.

En définitive, il s'agit de trouver dans le développement de

$$(a + b + c + \ldots + l)^{m+k},$$

a, b, c,..., l représentant, pour abréger, les m éléments qui entrent dans un polynôme de l'ordre μ, tous les termes tels que

$$N a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$$

dans lesquels aucun des exposants α, β,..., λ n'est égal à zéro, et par suite on aura

$$T_\mu = \sum\!\!\sum \frac{\Pi(m+k)}{\Pi\alpha.\Pi\beta\ldots\Pi\lambda} a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

le double signe $\sum\!\!\sum$ indiquant que l'on doit étendre la somme à toutes les valeurs qui satisfont à l'égalité

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots + \lambda = m + k,$$

et en outre permuter entre eux tous les termes a, b, c,..., l.

Pour avoir $\sum T_\mu$, il faudra opérer de la même manière sur tous les polynômes de l'ordre μ.

20. Corollaire II. — *Si l'on pose*

$$\varphi(x) = p_0 x^i + p_1 x^{i-1} + \ldots + p_i,$$

on aura

$$(6) \quad \sum \varphi(A_\mu) = \vartheta(\mu), \qquad i < m,$$

$$(7) \quad \sum \varphi(A_\mu) - \Pi m p_0 \sum \mathfrak{A}_\mu = \vartheta(\mu), \qquad i = m,$$

$$(8) \quad \sum \varphi(A_\mu) - \frac{\Pi(m+1)}{2} p_0 \sum \mathfrak{A}'_\mu - \Pi m p \sum \mathfrak{A}_\mu = \vartheta(\mu), \quad i = m+1.$$

21. Si l'on suppose

$$\varphi(x) = (x+h)^i,$$

on aura

$$(9) \quad \sum (A_\mu + h)^{m-i} = \vartheta(\mu),$$

$$(10) \quad \sum (A_\mu + h)^m - \Pi m \sum \mathfrak{A}_\mu = \vartheta(\mu),$$

$$(11) \quad \sum (A_\mu + h)^{m+1} - \frac{\Pi(m+1)}{2} \sum \mathfrak{A}'_\mu - mh \Pi m \sum \mathfrak{A}_\mu = \vartheta(\mu).$$

On serait arrivé au même résultat en augmentant de h tous les termes d'une colonne dans le tableau (A) et appliquant les formules du n° **18**.

22. Si l'on a

$$\varphi(x) = x(x+\rho)(x+2\rho)\ldots[x+(i-1)\rho] = x^{i|\rho},$$

il en résultera

$$(12) \quad \sum A_\mu^{m-i|\rho} = \vartheta(\mu),$$

$$(13) \quad \sum A_\mu^{m|\rho} - \Pi m \sum \mathfrak{A}_\mu = \vartheta(\mu),$$

$$(14) \quad \sum A_\mu^{m+i|\rho} - \frac{\Pi(m+1)}{2} \sum \mathfrak{A}'_\mu - \frac{m(m+1)}{2} \rho \Pi m \sum \mathfrak{A}_\mu = \vartheta(\mu).$$

Ces formules ressemblent à celles du n° **18**, et offrent un nouvel exemple de l'analogie qui existe entre les factorielles et les puissances.

§ II.

Applications diverses.

25. Telles sont les principales propriétés des systèmes de polynômes. On conçoit qu'on pourra en déduire d'autres moins générales, mais non moins intéressantes, en particularisant les quantités qui entrent dans leur formation.

En premier lieu, supposons tous les éléments du tableau (A) égaux à leur indice, mais représentant, suivant le rang qu'ils occupent, des unités du premier, du deuxième, du troisième ordre dans le système dont la base est n. On obtiendra évidemment les n^m premiers nombres de la suite naturelle, o compris.

Et si, après avoir ainsi choisi les éléments du système, on les multiplie tous par h et qu'on les augmente de α, les polynômes formeront une progression arithmétique commençant à $m\alpha$ et ayant h pour raison. On peut d'ailleurs disposer de α et de h de manière à obtenir une progression donnée. On a donc ce théorème.

n^m nombres en progression arithmétique peuvent être considérés comme les valeurs numériques des polynômes de m termes, dans le système dont la base est n, et rangés dans l'ordre adopté (n° **7**).

De sorte que les théorèmes démontrés dans le paragraphe précédent fournissent, entre les termes des progressions arithmétiques, de curieuses relations.

Soient, par exemple, les 16 nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

On peut les considérer comme appartenant à un système dont la base est 2 et le nombre des éléments 4. D'après la règle donnée (n° **8**), ils ont respectivement pour indices

0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0.

On aura donc

$$1+4+6+7+10+11+13+16=2+3+5+8+9+12+14+15,$$
$$1+4^2+6^2+7^2+10^2+11^2+13^2+16^2=2^2+3^2+5^2+8^2+9^2+12^2+14^2+15^2,$$
$$1+4^3+6^3+7^3+10^3+11^3+13^3+16^3=2^3+3^3+5^3+8^3+9^3+12^3+14^3+15^3.$$

24. Les nombres polygones étant des fonctions entières et du second degré d'une indéterminée, jouissent, d'après la remarque faite (n° 20), des mêmes propriétés que les progressions arithmétiques. Par exemple, si l'on prend 16 nombres polygones consécutifs, la somme de 8 d'entre eux sera égale à la somme des 8 autres. Si l'on en prend 64, la somme des carrés de 32 de ces nombres sera égale à la somme des carrés des 32 autres, etc. : propriétés qu'il serait bien difficile de démontrer directement.

25. Imaginons un système binaire ainsi composé :

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \ldots \quad 0,$$
$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ a_5, \ldots, \ a_m.$$

Il est facile de voir que, dans cet exemple, les polynômes de l'ordre 0 se réduisent aux sommes des termes de la seconde ligne pris en nombre pair; et les polynômes de l'ordre 1, aux sommes de ces termes pris en nombre impair.

On aura donc

$$(15)\quad \begin{cases} (a_1+a_2+\ldots+a_m)^{m-1}-\sum(a_2+a_3+\ldots+a_m)^{m-1} \\ +\sum(a_3+\ldots+a_m)^{m-1}\ \text{etc.}=0, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} (a_1+a_2+\ldots+a_m)^m-\sum(a_2+a_3+\ldots+a_m)^m \\ +\sum(a_3+\ldots+a_m)^m\ \text{etc.}=\Pi\, m\, a_1 a_2 \ldots a_m, \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} (a_1+a_2+\ldots+a_m)^{m+1}-\sum(a_2+a_3+\ldots+a)^{m+1} \\ +\sum(a_3+\ldots+a_m)^{m+1}\text{etc.}=\dfrac{\Pi(m+1)}{2}\, a_1 a_2 \ldots a_m (a_1+a_2+\ldots+a_m). \end{cases}$$

C'est ainsi que l'on aurait (en changeant la notation pour simplifier)

$$(a+b+c)^2-(a+b)^2-(a+c)^2-(b+c)^2+a^2+b^2+c^2=0,$$
$$(a+b+c)^3-(a+b)^3-(a+c)^3-(b+c)^3+a^3+b^3+c^3=6abc,$$
$$(a+b+c)^4-(a+b)^4-(a+c)^4-(b+c)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c).$$

On aurait encore, en considérant deux ou trois systèmes analogues,

$$(a+b+c)(a'+b'+c')-(a+b)(a'+b')-(a+c)(a'+c')$$
$$-(b+c)(b'+c')+aa'+bb'+cc'=0,$$

$$(a+b+c)(a'+b'+c')(a''+b''+c'')-(a+b)(a'+b')(a''+b'')-\text{etc.}$$
$$+aa'a''+bb'b''+cc'c''=ab'c''+ac'b''+\text{etc.}$$

26. Si l'on suppose

$$a_1=a_2=a_3\ldots=a_m,$$

on aura les identités suivantes qui sont bien connues :

$$(18)\quad m^{m-i}-m(m-1)^{m-i}+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m-i}-\ldots=0,$$

$$(19)\quad m^m-m(m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m-\ldots=\Pi m,$$

$$(20)\quad m^{m+1}-m(m-1)^{m+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m+1}-\ldots=\Pi m\frac{m(m+1)}{2}.$$

27. Considérons le système binaire

$$a,\ a,\ a,\ldots,\ a,$$
$$b,\ b,\ b,\ldots,\ b,$$

en lui appliquant la formule (1) on trouvera

$$(21)\quad (ma)^i-m[(m-1)a+b]^i+\frac{m(m-1)}{1.2}[(m-2)a+b]^i-\text{etc.}=0,$$

pour $i<m$.

Cette formule comprend la formule (18) comme cas particulier. On généralisera aussi sans peine les formules (19) et (20).

TROISIÈME PARTIE.

Des systèmes de produits.

§ I.

Théorèmes généraux sur les dérivées.

28. Nous supposerons dans ce qui va suivre que les quantités inscrites au tableau

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} a_0^1 \quad a_0^2 \quad a_0^3 \quad \dots \quad a_0^m, \\ a_1^1 \quad a_1^2 \quad a_1^3 \quad \dots \quad a_1^m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}^1 \, a_{n-1}^2 \, a_{n-1}^3 \dots \quad a_0^m, \end{cases}$$

sont des fonctions d'une certaine variable x. Nous continuerons à représenter par $\mathfrak{A}_\mu$ le produit des termes d'un polynôme de la classe μ, c'est-à-dire un produit de la classe μ : $d^i \mathfrak{A}_\mu$ sera la dérivée $i^{ème}$ de ce produit, et $\sum d^i \mathfrak{A}_\mu$ représentera la somme de toutes les dérivées de cet ordre obtenues en opérant sur tous les produits de la même classe.

29. D'après notre théorème fondamental (n° **15**), on a, en supposant que plusieurs systèmes se répètent,

$$\sum (\mathrm{A}^\alpha \mathrm{B}^\beta \mathrm{C}^\gamma \dots \mathrm{L}^\lambda)_\mu = \sum (\mathrm{A}^\alpha \mathrm{B}^\beta \mathrm{C}^\gamma \dots \mathrm{L}^\lambda)_\mu,$$

toutes les fois que la somme $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$, qui marque le nombre des systèmes considérés, est moindre que m.

Soient

$$\mathrm{T}, \quad \mathrm{S}$$

deux termes *identiques* pris dans les deux membres de cette égalité. Admettons que ceux des facteurs de $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$, ..., $\mathfrak{L}_\mu$, qui n'entrent pas dans T, y soient rétablis avec l'exposant o, et opérons de la même manière à l'égard de S.

Cela posé, pour avoir les termes,

$$T', \quad S',$$

qui correspondent à T et à S dans les expressions

$$\sum d^{\alpha}\mathfrak{a}_{\mu}\, d^{\beta}\mathfrak{B}_{\mu}\ldots d^{\lambda}\mathfrak{L}_{\mu}, \quad \sum d^{\alpha}\mathfrak{a}_{\nu}\, d^{\beta}\mathfrak{B}_{\nu}\ldots d^{\lambda}\mathfrak{L}_{\nu},$$

il suffira de regarder, suivant les règles connues, les exposants des facteurs de T et de S comme indiquant, non plus des puissances, mais des dérivées prises par rapport à x, en remplaçant $d^{0}k$ par k.

Il suit de là que T′ et S′ diffèrent par les facteurs affectés de la caractéristique d^{0}, mais qu'ils deviendront égaux si on les divise, le premier par $\mathfrak{a}_{\mu}\mathfrak{B}_{\mu}\ldots\mathfrak{L}_{\mu}$, le second par $\mathfrak{a}_{\nu}\mathfrak{B}_{\nu}\ldots\mathfrak{L}_{\nu}$. On aura donc

$$\frac{T'}{(\mathfrak{a}\mathfrak{B}\ldots\mathfrak{L})_{\mu}} = \frac{S'}{(\mathfrak{a}\mathfrak{B}\ldots\mathfrak{L})_{\nu}},$$

et, par suite,

$$(22) \qquad \sum\left(\frac{d^{\alpha}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}\cdot\frac{d^{\beta}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\cdots\frac{d^{\lambda}\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}\right)_{\mu} = \sum\left(\frac{d^{\alpha}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}\cdot\frac{d^{\beta}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\cdots\frac{d^{\lambda}\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}\right)_{\nu}$$

pourvu que l'on ait

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda<m.$$

30. La même analyse convient mot pour mot au cas où les éléments des divers systèmes considérés sont des fonctions de plusieurs variables, d^{α} indiquant alors, soit α dérivations opérées successivement par rapport à ces variables, soit une différentielle totale de l'ordre α. Si, en outre, on suppose que plusieurs systèmes deviennent identiques, le THÉORÈME FONDAMENTAL de cette troisième Partie pourra s'énoncer ainsi :

$$(22\ bis) \qquad \sum\left[\left(\frac{d^{\alpha}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}\right)^{a}\left(\frac{d^{\beta}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\right)^{b}\cdots\left(\frac{d^{\lambda}\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}\right)^{l}\right]_{\mu} = \vartheta(\mu),$$

à condition que l'on ait

$$a\alpha+b\beta+\ldots+l\lambda<m,$$

et que les opérations indiquées par la lettre d restent les mêmes quand on passe d'une classe à une autre.

31. Si l'on suppose, dans la formule (22),

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = i, \qquad \alpha + \beta + \ldots + \lambda = ki,$$

et tous les systèmes identiques, on aura

$$\sum \left(\frac{d^i \mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}_0}\right)^k_\mu = \vartheta(\mu), \tag{23}$$

pourvu que l'on ait

$$ik < m.$$

32. Si l'on suppose

$$k = 1,$$

la formule (23) devient

$$\sum \left(\frac{d^{m-i} \mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}_0}\right)_\mu = \vartheta(\mu). \tag{24}$$

On trouvera ensuite

$$\sum \left(\frac{d^m \mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}_0}\right)_\mu - \Pi m \sum \mathfrak{a}_\mu = \vartheta(\mu), \tag{25}$$

$$\sum \left(\frac{d^{m+1} \mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}_0}\right)_\mu - \frac{\Pi(m+1)}{2} \sum \mathfrak{a}'_\mu = \vartheta(\mu), \tag{26}$$

$\mathfrak{a}_\mu$, $\mathfrak{a}'_\mu$ désignant ce que deviennent les quantités $\mathfrak{a}_\mu$, $\mathfrak{a}'_\mu$ quand on y change les puissances en dérivées, et qu'on les divise ensuite respectivement par $\mathfrak{a}_\mu$, $\mathfrak{b}_\mu$, etc.

33. On trouvera avec la même facilité les formules qui correspondent aux formules (6), (7), (8) et suivantes de la deuxième partie de ce Mémoire.

§ II.

Applications diverses.

34. Nous avons vu (**25**) que n^m nombres en progression arithmétique pouvaient se partager en groupes, tels que certaines sommes

de puissances de leurs termes ne changeaient pas quand on passait d'un groupe à un autre.

Les progressions géométriques dont les termes sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables jouissent de propriétés analogues.

Par exemple, φ étant une fonction de x, on aura

$$\frac{d^i.\varphi}{\varphi} + \frac{d^i.\varphi^4}{\varphi^4} + \frac{d^i.\varphi^6}{\varphi^6} + \frac{d^i.\varphi^7}{\varphi^7} + \frac{d^i.\varphi^{10}}{\varphi^{10}} + \frac{d^i.\varphi^{11}}{\varphi^{11}} + \frac{d^i.\varphi^{13}}{\varphi^{13}} + \frac{d^i.\varphi^{16}}{\varphi^{16}}$$
$$= \frac{d^i.\varphi^2}{\varphi^2} + \frac{d^i.\varphi^3}{\varphi^3} + \frac{d^i.\varphi^5}{\varphi^5} + \frac{d^i.\varphi^8}{\varphi^8} + \frac{d^i.\varphi^9}{\varphi^9} + \frac{d^i.\varphi^{12}}{\varphi^{12}} + \frac{d^i.\varphi^{14}}{\varphi^{14}} + \frac{d^i.\varphi^{15}}{\varphi^{15}},$$

pourvu que i soit moindre que 4. On aurait aussi (**31**)

$$\left(\frac{d.\varphi}{\varphi}\right)^3 + \left(\frac{d.\varphi^4}{\varphi^4}\right)^3 + \text{etc.} = \left(\frac{d.\varphi^2}{\varphi^2}\right)^3 + \left(\frac{d.\varphi^3}{\varphi^3}\right)^3 + \text{etc.}$$

35. La considération du système

$$1,\quad 1,\quad 1,\ldots,\quad 1,$$
$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots,\quad a_m$$

conduira aux formules suivantes :

$$\begin{cases} d^i.a_1a_2a_3\ldots a_m & = 0, & i < m, \quad (27) \\ -\sum a_1 d^i.a_2a_3\ldots a_m & = \Pi m\, da_1 da_2\ldots da_m, & i = m, \quad (28) \\ +\sum a_1a_2 d^i.a_3\ldots a_m & & \\ -\text{etc.} & = \frac{\Pi(m+1)}{2}\, d\,(da_1 da_2\ldots da_m), & i = m+1. \quad (29) \end{cases}$$

Par exemple on aurait, u, v, z étant trois fonctions quelconques,

$$d^2.uvz - ud^2.vz - vd^2.uz - zd^2.uv + vzd^2u + uzd^2v + uvd^2z = 0,$$
$$d^3.uvz - ud^3.vz - vd^3.uz - \text{etc.} = 6\,du\,dv\,dz,$$
$$d^4.uvz - ud^4.vz - vd^4.uz - \text{etc.} = 12\,d\,(du\,dv\,dz).$$

36. Si l'on suppose

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m = \varphi,$$

on aura

$$
\begin{aligned}
(30)\quad & d^i.\varphi^m - m\varphi d^i.\varphi^{m-1} && = 0, && i < m,\\
(31)\quad & + \frac{m(m-1)}{1.2} d^i.\varphi^{m-2}\ldots && = \Pi m(d\varphi)^m, && i = m,\\
(32)\quad & \mp m\varphi^{m-1} d^i.\varphi^1 \pm \varphi^m d^i.\varphi^0 && = \frac{\Pi(m+1)}{2} m(d\varphi)^{m-1} d^2\varphi, && i = m+1.
\end{aligned}
$$

37. Et, plus généralement, u étant une fonction quelconque, si l'on considère le système

$$u,\quad 1,\quad 1,\ldots,\quad 1,$$

$$u\varphi,\quad \varphi,\quad \varphi,\ldots,\quad \varphi,$$

on aura

$$
\begin{aligned}
(33)\quad & d^i.u\varphi^m - mu\varphi d^i.u\varphi^{m-1} && = 0, && i < m,\\
(34)\quad & + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi^2 d^i.u\varphi^{m-2}\ldots && = \Pi mu(d\varphi)^m, && i = m.\\
(35)\quad & \mp m\varphi^{m-1} d^i.u\varphi \pm \varphi^m d^i.u && = \frac{\Pi(m+1)}{2} mu(d\varphi)^{m-1} d^2\varphi + \Pi(m+1) du(d\varphi && \\
& && && i = m+1.
\end{aligned}
$$

38. La formule (33), donnée pour la première fois dans les *Commentaires de Saint-Pétersbourg* (année 1772) par Lexell, a été reproduite et étendue par Arbogast (*Calcul des dérivations*, page 329).

Lexell arrive à cette formule par induction, en cherchant à vérifier la série de Lagrange. Il montre ensuite que si la formule est vraie pour m, elle est encore vraie pour $m+1$, et l'ayant ainsi établie d'une manière rigoureuse, il s'en sert pour démontrer la série de Lagrange, ce qu'il fait à peu près de la manière suivante :

Soit

$$t - x + \varphi(x) = 0,$$

on aura

$$\psi(t) = \psi[x - \varphi(x)];$$

développant le second membre par la série de Taylor, représentant $\psi'(x)$, $\psi''(x)$,... respectivement par u, du, d^2u,..., et $\varphi(x)$ simple-

ment par φ, ou aura

$$\psi(t) = \psi(x) - u\varphi + \frac{\varphi^2}{1.2}du - \frac{\varphi^3}{1.2.3}d^2u + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4}d^3u - \ldots,$$

et ensuite changeant tour à tour dans cette égalité $\psi(t)$ en $\varphi(t)\psi'(t)$, $[(\varphi t)^2\psi' t]'$, etc.

$$\varphi(t)\psi'(t) = + u\varphi - \frac{2\varphi}{1.2}d.u\varphi + \frac{3\varphi^2}{1.2.3}d^2.u\varphi - \frac{4\varphi^3}{1.2.3.4}d^3.u\varphi + \ldots,$$

$$\frac{1}{1.2}[(\varphi t)^2\psi' t]' = + \frac{1}{1.2}d.u\varphi^2 - \frac{3\varphi}{1.2.3}d^2.u\varphi^2 + \frac{6\varphi^2}{1.2.3.4}d^3.u\varphi^2 - \ldots,$$

$$\frac{1}{1.2.3}[(\varphi t)^3\psi' t]'' = + \frac{1}{1.2.3}d^2.u\varphi^3 - \frac{4\varphi}{1.2.3.4}d^3.u\varphi^3 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}[(\varphi t)^4\psi' t]''' = + \frac{1}{1.2.3.4}d^3.u\varphi^4 - \ldots$$

et ainsi de suite.

En ajoutant ces égalités, les termes des seconds membres se détruisent en vertu de la formule (33), à l'exception de $\psi(x)$, et il reste

$$\psi(x) = \psi t + \varphi t\psi' t + \frac{1}{1.2}[(\varphi t)^2\psi' t]' + \frac{1}{1.2.3}[(\varphi t)^3\psi' t]'' + \ldots,$$

ce qui est bien la série de Lagrange.

39. La formule de Lexell peut encore se généraliser. Elle n'est, en effet, qu'un cas particulier de la suivante :

$$(d^i.u\varphi^m)^k - m(d^i.u\varphi^{m-1})^k + \frac{m(m-1)}{1.2}(d^i.u\varphi^{m-2})^k \ldots = 0,$$

qui a lieu toutes les fois que ik est moindre que m (n° **31**).

§ III.

Théorèmes sur quelques déterminants de fonctions.

40. *Lemme.* Soient

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots, \quad \varphi_m$$

$m+1$ fonctions de x. Si l'on appelle D le déterminant

$$\sum(\pm d^0\varphi_0 d^1\varphi_1 d^2\varphi_2 \ldots d^{m-1}\varphi_{m-1} d^m\varphi_m),$$

et D_1 le déterminant

$$\sum (\pm d^0\varphi_0 d^1\varphi_1 d^2\varphi_2 \dots d^{m-1}\varphi_{m-1} d^{m+1}\varphi_m),$$

qui ne diffère du premier que par le changement de d^m en d^{m+1}, je dis qu'on aura

$$d.D = D_1. \tag{36}$$

En effet, soient

$$A = \dots d^\alpha \varphi_\mu d^{\alpha+1}\varphi_\nu, \dots,$$
$$B = \dots d^\alpha \varphi_\nu d^{\alpha+1}\varphi_\mu, \dots,$$

deux termes du déterminant D, que nous supposerons ne différer que par les facteurs mis en évidence. Si l'on différentie D, le terme provenant de A par la différentiation de $d^\alpha\varphi_\mu$ et celui qui provient de B par la différentiation de $d^\alpha\varphi_\nu$ seront les mêmes. D'ailleurs, d'après les règles connues, ces deux termes ont des signes opposés : donc ils se détruisent.

Il résulte de là qu'il ne reste dans $d.D$ que les termes qui proviennent de la différentiation des facteurs affectés de d^m; en sorte que $d.D$ ne diffère de D que par le changement de d^m en d^{m+1} : donc $d.D$ n'est autre chose que D_1.

41. *Corollaire.* Soient

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \dots, \quad x_m$$

$m+1$ fonctions inconnues déterminées par les $m+1$ équations

$$(N)\begin{cases} x_0 d^0\varphi_0 + x_1 d^1\varphi_0 + x_2 d^2\varphi_0 + \dots + x_m d^m\varphi_0 = d^{m+1}\varphi_0, \\ x_0 d^0\varphi_1 + x_1 d^1\varphi_1 + x_2 d^2\varphi_1 + \dots + x_m d^m\varphi_1 = d^{m+1}\varphi_1, \\ x_0 d^0\varphi_2 + x_1 d^1\varphi_2 + x_2 d^2\varphi_2 + \dots + x_m d^m\varphi_2 = d^{m+1}\varphi_2. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_0 d^0\varphi_m + x_1 d^1\varphi_m + x_2 d^2\varphi_m + \dots + x_m d^m\varphi_m = d^{m+1}\varphi_m. \end{cases}$$

Si l'on cherche la valeur de x_m, on trouvera, d'après les règles connues,

$$x_m = \frac{D_1}{D},$$

et, à cause de l'égalité (36),

$$x_m = \frac{d.\mathrm{D}}{\mathrm{D}} = d.\log \mathrm{D}.$$

42. Considérons les équations suivantes :

$$(\mathrm{P})\begin{cases} x_0 d^0.u\varphi^0 + x_1 d^1.u\varphi^0 + x_2 d^2.u\varphi^0 + \ldots + x_m d^m.u\varphi^0 = d^{m+1}.u\varphi^0, \\ x_0 d^0.u\varphi^1 + x_1 d^1.u\varphi^1 + x_2 d^2.u\varphi^1 + \ldots + x_m d^m.u\varphi^1 = d^{m+1}.u\varphi^1, \\ x_0 d^0.u\varphi^2 + x_1 d^1.u\varphi^2 + x_2 d^2.u\varphi^2 + \ldots + x_m d^m.u\varphi^2 = d^{m+1}.u\varphi^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_0 d^0.u\varphi^m + x_1 d^1.u\varphi^m + x_2 d^2.u\varphi^m + \ldots + x_m d^m.u\varphi^m = d^{m+1}.u\varphi^m. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces équations, après les avoir multipliées respectivement par

$$\pm\varphi^m, \quad \mp m\varphi^{m-1}, \ldots, \quad + \frac{m(m-1)}{2}\varphi^2, \quad - m\varphi, \quad + \varphi^0,$$

on aura, en ayant égard aux formules (33), (34), (35),

$$x_m(\Pi m.ud\varphi^m) = \Pi u \frac{m(m+1)}{2} ud\varphi^{m-1} d^2\varphi + \Pi(m+1)dud\varphi^m;$$

d'où

$$x_m = \frac{m(m+1)}{2}\frac{d^2\varphi}{d\varphi} + (m+1)\frac{du}{u} = d.\log\left[u^{m+1} d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}}\right];$$

d'un autre côté, si l'on pose

$$\mathrm{D} = \sum(\pm d^0.u\varphi^0 d^1.u\varphi^1 \ldots d^m.u\varphi^m),$$

on aura (n° **41**)

$$x_m = d.\log \mathrm{D};$$

donc

$$d.\log \mathrm{D} = d.\log\left[u^{m+1} d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}}\right],$$

et, par suite,

$$\mathrm{D} = \mathrm{C} u^{m+1} d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

C désignant une constante.

45. Pour obtenir la constante C, observons que le déterminant

$$\sum (\pm a_0^0 a_1^1 a_2^2 \dots a_m^m),$$

dans lequel les indices supérieurs sont des exposants, est, d'après un théorème de Vandermonde, égal au produit

$$(a_m - a_{m-1})(a_m - a_{m-2}) \dots (a_m - a_0)(a_{m-1} - a_{m-2}) \dots (a_1 - a_0).$$

Or, si l'on suppose

$$u = e^x, \qquad \varphi = e^x,$$

la constante devient égale à

$$\sum [\pm 1^0 . 2^1 . 3^2 \dots (m+1)^m],$$

ou, en appliquant le théorème de Vandermonde,

$$\Pi m \, \Pi (m-1) \, \Pi (m-2) \dots \Pi 2 \, \Pi 1.$$

Si donc on désigne cette dernière expression par $\Pi^2 m$, on aura

$$C = \Pi^2 m.$$

44. Ainsi l'on aura, quelles que soient les fonctions u et φ,

$$(37) \quad \sum (\pm d^0 . u\varphi^0 d^1 . u\varphi^1 \dots d^m . u\varphi^m) = \Pi^2 m . u^{m+1} d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Si l'on suppose

$$u = 1,$$

les termes du premier membre qui ont pour facteur l'une des quantités $d.u\varphi^0$, $d^2.u\varphi^0$, etc., disparaissent, et l'on a plus simplement

$$(w) \qquad \sum (\pm d\varphi d^2 . \varphi^2 d^3 . \varphi^3 \dots d^m . \varphi^m) = \Pi^2 m . d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Cette identité remarquable est due à Wronski (voir *Philosophie de la Technie algorithmique*, tome II, page 116). M. le capitaine Abadie

en a donné une belle démonstration dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, de MM. Terquem et Gerono (tome XI).

Pour mieux fixer les idées, nous avons supposé toujours que les fonctions u et φ ne dépendaient que d'une seule variable ; mais il est aisé de voir, suivant la remarque déjà faite au n° **30**, que toutes les formules démontrées dans ce paragraphe sont encore vraies quand on considère des fonctions de plusieurs variables, et que d^{α} désigne soit α dérivations opérées successivement par rapport à ces variables, soit une différentielle totale de l'ordre α.

45. Si, dans la formule (37), on pose

$$u = \varphi,$$

et que l'on change m en $m - 1$, on obtient

$$(38)\quad \sum(\pm d^0.\varphi^1 d^1.\varphi^2 d^2.\varphi^3 \dots d^{m-1}.\varphi^m) = \Pi^2(m-1)\,\varphi^m.d\varphi^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

Pour en donner une vérification dans un cas très-simple, nous supposerons $m = 3$, $\varphi = x$. Il s'agira alors de calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \\ x^3 & 3x^2 & 6x \end{vmatrix}.$$

On trouve, en appliquant les règles connues,

$$12x^3 - 6x^3 + 2x^3 - 0 + 0 - 6x^3,$$

ou $2x^3$, ce qui s'accorde bien avec la formule (38).

SUR LA

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On sait que les systèmes d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx'}, \qquad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dV}{dx},$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy'}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dV}{dy},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dz'}, \qquad \frac{dz'}{dt} = -\frac{dV}{dz},$$

où V désigne une fonction de t, x, y,..., z, x', y',..., z', jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, et offrent des facilités particulières pour l'intégration. Deux intégrales d'un tel système étant connues, on pourra quelquefois en déduire une troisième, une quatrième, arriver même à obtenir ainsi toutes les intégrales du problème. Dans certains cas où le procédé que nous rappelons ne réussirait plus, on peut tirer un autre parti des intégrales déjà trouvées. M. Bour a sur ce point beaucoup ajouté aux ressources dont les géomètres disposaient avant lui. Je pense donc faire une chose utile en indiquant un moyen très-simple de ramener à la forme ci-dessus un système donné quelconque d'équations différentielles simultanées. A la vérité, il faut augmenter pour cela le nombre des variables et par conséquent le nombre des équations, mais cet inconvénient sera souvent plus que compensé par les commodités qu'offrira la forme *canonique* dont nous parlons.

Considérons donc un nombre quelconque d'équations différentielles d'ordres quelconques entre un nombre égal de fonctions ou d'inconnues qu'elles doivent déterminer et une variable indépendante t. On réduira d'abord ce système à un autre où toutes les dérivées seront

du premier ordre en ajoutant, s'il le faut, comme inconnues nouvelles, les dérivées successives des inconnues anciennes jusqu'à l'ordre inférieur d'une unité à celui qui figure dans les équations données. Cela fait, soit

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \ldots, \quad \frac{dz}{dt} = Z,$$

le système final que l'on a à traiter, et où X, Y,..., Z représentent des fonctions de t et des inconnues tant anciennes que nouvelles $x, y, \ldots, z$. Désignons par $x', y', \ldots, z'$ des variables auxiliaires conjuguées respectivement à $x, y, \ldots, z$, et pour la détermination desquelles nous introduirons un nombre égal d'équations différentielles : je dis qu'on peut choisir ces équations, qui sont à volonté, de telle manière qu'en les joignant à celles que nous venons d'écrire nous ayons un groupe canonique. Prenons à cet effet

$$V = x'X + y'Y + \ldots + z'Z,$$

ou plus généralement

$$V = x'X + y'Y + \ldots + z'Z + \varphi(t, x, y, \ldots, z),$$

et posons

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dV}{dy}, \ldots, \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{dV}{dz}.$$

Nous aurons évidemment

$$X = \frac{dV}{dx'}, \quad Y = \frac{dV}{dy'}, \ldots, \quad Z = \frac{dV}{dz'},$$

par conséquent

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy'}, \ldots, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dz'}.$$

Nous voilà donc conduits, comme nous le voulions, au système canonique

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx'}, \qquad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dV}{dx}, \\
&\frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy'}. \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dV}{dy}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dz'}, \qquad \frac{dz'}{dt} = -\frac{dV}{dz}.
\end{aligned}$$

J'ai donné ce procédé et développé diverses conséquences intéressantes qui en découlent, dans mes Leçons au Collége de France, 2e semestre de l'année scolaire 1852-1853. Mon cours ayant alors pour objet la formation et l'intégration des équations différentielles, je devais naturellement m'occuper beaucoup des équations à forme canonique écrites plus haut et dont on connaît toute l'importance dans les questions de Mécanique.

A cette occasion, il est bon de rappeler que, dans les théories générales concernant de telles équations, on peut admettre sans inconvénient que la variable indépendante manque dans la fonction dont les seconds membres dépendent; car s'il n'en est point ainsi d'abord, on fera que cela soit en introduisant deux variables nouvelles τ et t' : la première τ est supposée égale à $t +$ constante, en sorte que

$$\frac{dt}{d\tau} = 1;$$

l'autre est définie par l'équation

$$\frac{dt'}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{V}}{dt}.$$

Soit, en effet,

$$\mathrm{R} = \mathrm{V} + t'.$$

Comme τ et t' n'entrent pas dans V qui est une fonction de $t, x, y, \ldots, z, x', y', \ldots, z'$ seulement, on a

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt'} = 1 = \frac{dt}{d\tau}.$$

D'ailleurs les dérivées de V et celles de R par rapport à $t, x, y, \ldots, z, x', y', \ldots, z'$ sont égales. Enfin $dt = d\tau$. On peut donc poser ce système

$$\begin{aligned}
&\frac{dt}{d\tau} = \frac{d\mathrm{R}}{dt'}, \quad \frac{dt'}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{R}}{dt},\\
&\frac{dx}{d\tau} = \frac{d\mathrm{R}}{dx'}, \quad \frac{dx'}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{R}}{dx},\\
&\frac{dy}{d\tau} = \frac{d\mathrm{R}}{dy'}, \quad \frac{dy'}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{R}}{dy},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dz}{d\tau} = \frac{d\mathrm{R}}{dz'}, \quad \frac{dz'}{d\tau} = -\frac{d\mathrm{R}}{dz},
\end{aligned}$$

et cela démontre notre assertion, puisque τ, qui est ici la variable indépendante, n'entre pas dans la fonction R au moyen de laquelle on forme les seconds membres. Comme ce système a naturellement l'intégrale

$$\text{R} \quad \text{ou} \quad \text{V} + t' = \text{constante},$$

analogue à celle des forces vives en Mécanique, on voit qu'on pourrait définir par l'équation

$$\text{V} + t' = \text{constante}$$

la variable t' qu'on n'a introduite d'abord que par une équation différentielle.

La considération des variables τ et t' peut être utile, comme j'ai déjà eu occasion de le faire voir. Mais j'attache surtout du prix à l'idée, si simple qu'elle puisse paraître, de ramener à la forme *canonique*, au moyen des variables auxiliaires $x', y', \ldots, z'$, un système *quelconque* d'équations différentielles.

SUR

LES SOMMES DE DIVISEURS DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On sait qu'Euler a trouvé une relation remarquable entre les sommes de diviseurs des nombres. En désignant par $\int(n)$ la somme des diviseurs du nombre n, on a

$$\int(n) = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \ldots.$$

Les nombres placés sous le signe $\int$ dans le second membre sont de l'une ou de l'autre des deux formes

$$n - \frac{3m^2 - m}{2}, \quad n - \frac{3m^2 + m}{2},$$

et le terme qui répond à chacun d'eux est positif ou négatif suivant que m est ou n'est pas impair. On suppose $\int(0) = n$; mais on n'admet pas sous le signe $\int$ de nombre négatif, et il faut s'arrêter au moment où un tel nombre s'introduirait par la loi de la série.

Cette dernière remarque doit être également appliquée à une autre formule dont je vais dire ici deux mots. Dans cette formule, curieuse aussi, les nombres placés sous le signe $\int$ sont tous impairs et déduits du nombre $2n+1$, pris à volonté pour point de départ, en en retranchant le double d'un nombre triangulaire : la loi des coefficients est d'ailleurs très-différente. On a, en effet,

$$\text{(A)} \qquad \sum\left[n - 5\,\frac{m(m+1)}{2}\right] \int(2n+1-m^2-m) = 0,$$

le signe $\sum$ se rapportant aux valeurs successives 0, 1, 2, 3,..., de m,

sous la condition de s'arrêter à l'instant où l'on cesserait d'avoir

$$2n+1-m^2-m>0.$$

La formule (A) peut s'écrire autrement :

$$n\left[\int(2n+1)+\int(2n+1-2)+\ldots+\int(2n+1-m^2-m)+\ldots\right]$$
$$=5\left[\int(2n+1-2)+\ldots+\frac{m(m+1)}{2}\int(2n+1-m^2-m)+\ldots\right].$$

Soit, par exemple, $n=4$; on devra avoir

$$4\left[\int(9)+\int(7)+\int(3)\right]=5\left[\int(7)+3\int(3)\right],$$

c'est-à-dire

$$4(13+8+4)=5(8+3.4),$$

ce qui est exact.

J'ignore si quelqu'un avait déjà donné la formule (A), qui n'est au surplus qu'une conséquence immédiate de l'équation connue

$$\left(1+x+\ldots+x^{\frac{m(m+1)}{2}}+\ldots\right)^4=1+4x+\ldots+x^n\int(2n+1)+\ldots;$$

il suffit de prendre la différentielle logarithmique des deux membres, et d'égaler de part et d'autre les coefficients des puissances de x après avoir chassé les dénominateurs.

SUR L'ÉQUATION

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

On sait et il est d'ailleurs évident que l'expression

$$1.2.3\ldots(p-1)+1$$

n'est divisible par p que quand p est un nombre premier. A plus forte raison, faut-il que p soit premier pour que cette expression devienne une puissance de p et vérifie l'équation

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m.$$

Cela arrive pour $p=2$, $p=3$ et $p=5$, ainsi que le montrent les identités $1+1=2$, $1.2+1=3$, $1.2.3.4+1=5^2$. Mais je vais prouver que si p surpasse 5, l'équation dont nous parlons est impossible.

En effet on en tirerait, en retranchant 1 des deux membres, puis divisant par $p-1$,

$$1.2.3\ldots(p-2)=p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+p+1.$$

Le produit $1.2.3\ldots(p-2)$ contient, si p est >5, les deux facteurs distincts 2 et $\frac{p-1}{2}$; il est donc divisible par leur produit $p-1$: il faudrait donc que

$$p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+p+1$$

fût divisible par $p-1$, et comme chacun des termes donne l'unité pour reste de la division par $p-1$, il faudrait que la somme de ces restes, qui est le nombre m, fût divisible par $p-1$. Dès lors m serait au moins égal à $p-1$, et conséquemment le produit $1.2.3\ldots(p-1)$ serait au moins égal à $p^{p-1}-1$. Or on a évidemment, au contraire,

$$1.2.3\ldots(p-1)<(p-1)^{p-1}<p^{p-1}-1.$$

L'équation

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m$$

est donc impossible pour $p>5$.

On voit à quoi tiennent les exceptions pour 2, 3 et 5. Pour $p=5$, les facteurs 2 et $\frac{p-1}{2}$ ne sont plus distincts, et l'on n'a plus le droit de se servir, comme on l'a fait, de leur produit $p-1$. Pour $p=3$ et $p=2$, on n'a plus même le facteur 2.

On prouverait semblablement que l'équation

$$\left(1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\right)^2+1=p^m,$$

qui a lieu pour $p=5$ puisque $(1.2)^2+1=5$, n'a jamais lieu dès que p surpasse 5.

Enfin un mode analogue de discussion s'applique à l'équation

$$1.2.3\ldots(s-1).1.2.3\ldots(p-s)=p^m\pm 1.$$

Mais ici, outre le facteur $\frac{p-1}{2}$, on peut avoir à employer aussi $\frac{p+1}{2}$ et $\frac{p\pm 1}{4}$.

SUR LA DÉTERMINATION DES VALEURS MOYENNES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 9 août 1849.)

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. JULES HOËL.

Bien que les fonctions que l'on considère dans la Théorie des Nombres ne soient presque jamais susceptibles d'être représentées par des expressions analytiques, et semblent soumises à une marche tout à fait irrégulière, cependant on rencontre dans les valeurs moyennes de ces fonctions une tendance à la régularité d'autant plus grande que l'on s'avance plus loin dans leur série, c'est-à-dire qu'il y a des expressions simples et déterminées qui représentent la marche des valeurs moyennes avec une exactitude toujours croissante, absolument de la même manière qu'une courbe suit de plus en plus près, dans son parcours, une autre courbe dont elle est asymptote. On trouve ainsi, vers la fin de la cinquième section des *Disquisitiones arithmeticæ*, plusieurs expressions très-remarquables de cette espèce, qui se rapportent à la théorie des formes quadratiques. Comme ces résultats intéressants, que l'auteur ne fait qu'indiquer en passant et sans les prouver, n'avaient pas encore été démontrés, et que, d'autre part, les méthodes propres à traiter ce genre de questions sont généralement peu connues, je m'étais déjà occupé, il y a plusieurs années, de chercher des moyens propres à atteindre ce but. Cependant, de ce travail, je n'ai rien livré à la publicité, à l'exception de quelques résultats nouveaux, parce que j'avais conçu le dessein, en continuant mes efforts, de simplifier encore dans quelque point essentiel la résolution de pareils problèmes, et en particulier de la rendre indépendante du calcul intégral. D'autres recherches m'ont alors détourné assez longtemps de cet objet. Lorsque plus tard je m'y suis remis, je me suis convaincu

que, dans beaucoup de cas, des considérations tout à fait élémentaires, basées sur une transformation de séries de la plus grande simplicité, suffisent pour conduire à l'expression asymptotique de la valeur moyenne. Je me bornerai pour le moment à une suite de problèmes pour lesquels le moyen que j'emploie suffit seul. Dans un Mémoire suivant je m'occuperai de problèmes plus difficiles, dont la solution exige que l'on combine la transformation en question avec d'autres moyens auxiliaires.

§ 1.

Pour présenter sous son vrai jour la transformation sur laquelle repose principalement la solution des problèmes traités dans ce Mémoire, il me paraît convenable de commencer par une des questions les plus simples, d'en pousser la solution aussi loin que cela peut se faire sans cette transformation, et de la compléter alors avec le secours de celle-ci. Désignons par $f(n)$ le nombre des diviseurs du nombre entier n, et proposons-nous ce problème, de déterminer ce que l'on peut appeler le *terme sommatoire* de cette fonction, c'est-à-dire la somme

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \mathrm{F}(n).$$

Soit s un nombre entier $\leq n$; il se trouvera, dans notre somme, autant d'unités correspondantes au diviseur s qu'il y aura de multiples de s parmi les nombres $1, 2, \ldots, n$. Or le nombre de ces multiples est $\left[\frac{n}{s}\right]$, en nous servant, comme nous le ferons toujours dans la suite, de crochets carrés pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans la quantité entre crochets. Il résulte de là

$$\mathrm{F}(n) = \sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right],$$

le signe de sommation se rapportant à s. De cette équation sort immédiatement une détermination approchée, ou, en d'autres termes, une expression asymptotique de $\mathrm{F}(n)$. En effet, $\frac{n}{s}$ surpassant le nombre entier $\left[\frac{n}{s}\right]$ de moins d'une unité, on a, à une erreur près qui ne peut pas surpasser la limite n,

$$\mathrm{F}(n) = n \sum_1^n \frac{1}{s}.$$

Mais on a

$$\sum_1^n \frac{1}{s} = \log n + C + \frac{1}{2n} + \dots,$$

où $C = 0{,}5772156\dots$.

La dernière expression de $F(n)$ étant déjà en erreur d'une quantité de l'ordre de n, il ne faut conserver de la série infinie que son premier terme, et l'on voit alors que l'équation

$$F(n) = n \log n$$

est exacte à une erreur près du premier ordre, erreur dont on peut, du reste, obtenir facilement une limite supérieure. Maintenant la fonction qui est de l'ordre de $n \log n$ contient-elle dans son expression asymptotique un terme de l'ordre de n avec un coefficient constant, ou, en d'autres termes, la quantité $\frac{1}{n} F(n) - \log n$, pour des valeurs croissantes de n, converge-t-elle vers une limite fixe? C'est ce qu'on ne peut décider par le procédé actuel.

§ II.

La transformation en question, dont nous allons maintenant nous occuper, repose sur cette simple remarque que, tandis que les termes de la série

$$\left[\frac{n}{1}\right], \quad \left[\frac{n}{2}\right], \dots, \quad \left[\frac{n}{s}\right], \dots,$$

terminée au $n^{ième}$ terme, commencent par décroître très-rapidement, chaque terme, au contraire, à partir d'un certain rang, devient égal au suivant ou ne le surpasse plus que d'une unité. Cela arrivera évidemment aussitôt que la différence $\frac{n}{s} - \frac{n}{s+1} = \frac{n}{s(s+1)}$ sera devenue égale ou inférieure à l'unité. Si l'on détermine donc le plus petit nombre entier μ qui satisfasse à la condition $\mu(\mu+1) \geq n$, la propriété en question aura lieu au plus tard à partir du $\mu^{ième}$ terme inclusivement. Mais comme il est tout à fait indifférent pour notre objet que la transformation que nous avons en vue soit étendue à un terme de plus ou de moins, nous choisirons, pour plus de simplicité, μ égal à la racine carrée de n, si elle est entière; ou, dans le cas de l'incommensurabilité de cette racine, égal au nombre entier immédiatement supérieur. On a

ainsi $\mu^2 \geqq n$, et par suite $\mu(\mu+1) > n$. Posons maintenant

$$\left[\frac{n}{\mu}\right] = \nu,$$

ν, comme il est facile de le voir, pouvant différer de μ tout au plus de deux unités, et désignons par t un quelconque des nombres ν, $\nu-1, \ldots, 2, 1$; on peut aisément déterminer l'indice s du terme $\left[\frac{n}{s}\right]$ le plus éloigné du commencement auquel corresponde la valeur t, et qui soit suivi par conséquent d'un terme ayant pour valeur $t-1$. L'indice cherché est donné par la double condition

$$\frac{n}{s} \geqq t, \quad \frac{n}{s+1} < t,$$

d'où résulte immédiatement

$$s \leqq \frac{n}{t}, \quad s+1 > \frac{n}{t},$$

c'est-à-dire

$$s = \left[\frac{n}{t}\right].$$

Considérons maintenant la somme

$$\left[\frac{n}{1}\right]\varphi(1) + \left[\frac{n}{2}\right]\varphi(2) + \ldots + \left[\frac{n}{p}\right]\varphi(p),$$

où p, comme cela s'entend naturellement, est pris $\leqq n$, et en même temps $> \mu$, ou plutôt considérons seulement la partie de cette somme

$$\left[\frac{n}{\mu}\right]\varphi(\mu) + \ldots + \left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s) + \ldots + \left[\frac{n}{p}\right]\varphi(p),$$

qui commence au $\mu^{ième}$ terme : nous pouvons la transformer de manière à réunir dans des sommes partielles les termes pour lesquels $\left[\frac{n}{s}\right]$ a la même valeur, et ajouter ensuite toutes les sommes partielles.

Détachons, pour plus d'uniformité, de la première somme partielle le terme correspondant à $s = \mu$, reportons-le avec les $\mu - 1$ termes déjà mis à part, et posons

$$\left[\frac{n}{p}\right] = q.$$

Les sommes partielles, d'après ce qui précède, s'étendent respectivement depuis

$$s = \mu \text{ exclus., jusqu'à } s = \left[\frac{n}{\nu}\right] \text{ inclus., et la valeur corresp. de } \left[\frac{n}{s}\right] = \nu,$$

$$s = \left[\frac{n}{\nu}\right] \text{ » } s = \left[\frac{n}{\nu-1}\right] \text{ » } \left[\frac{n}{s}\right] = \nu-1,$$

$$s = \left[\frac{n}{\nu-1}\right] \text{ » } s = \left[\frac{n}{\nu-2}\right] \text{ » } \left[\frac{n}{s}\right] = \nu-2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s = \left[\frac{n}{q+1}\right] \text{ » } s = p \text{ » } \left[\frac{n}{s}\right] = q.$$

En désignant maintenant par $\psi(s)$ le terme sommatoire de la fonction $\varphi(s)$, c'est-à-dire $\sum \varphi(s)$, pris depuis $s = 1$ jusqu'à $s = s$, les valeurs des sommes partielles sont

$$\nu\left(\psi\left[\frac{n}{\nu}\right] - \psi(\mu)\right), \quad (\nu-1)\left(\psi\left[\frac{n}{\nu-1}\right] - \psi\left[\frac{n}{\nu}\right]\right),$$

$$(\nu-2)\left(\psi\left[\frac{n}{\nu-2}\right] - \psi\left[\frac{n}{\nu-1}\right]\right), \ldots, \quad q\left(\psi(p) - \psi\left[\frac{n}{q+1}\right]\right),$$

et leur réunion donne l'expression

$$-\nu\psi(\mu) + \psi\left[\frac{n}{\nu}\right] + \psi\left[\frac{n}{\nu-1}\right] + \ldots + \psi\left[\frac{n}{q+1}\right] + q\psi(p).$$

Nous obtenons ainsi la formule générale de transformation

$$(a) \quad \sum_1^p \left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s) = q\psi(p) - \nu\psi(\mu) + \sum_1^{\mu}\left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu}\psi\left[\frac{n}{s}\right].$$

Le cas qui se présente le plus fréquemment dans l'application de cette formule est celui où $p = n$, et par suite $q = 1$. Il vient dans cette hypothèse

$$(b) \qquad \sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s) = -\nu\psi(\mu) + \sum_1^{\mu}\left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s) + \sum^{\nu}\psi\left[\frac{n}{s}\right].$$

Comme on le voit, l'avantage de cette transformation consiste en ce

que, par son moyen, une série dont le nombre des termes est n, et qui contient dans chaque terme un facteur de la forme $\left[\frac{n}{s}\right]$, est ramenée à deux autres dans lesquelles le nombre des termes qui contiennent de même les $\left[\frac{n}{s}\right]$ est abaissé à l'ordre de $\sqrt{n}$. Une semblable transformation est encore exécutable lorsqu'au lieu du dénominateur s, il entre dans l'expression $\left[\frac{n}{s}\right]$ une fonction de s croissant avec s. Toutefois, une telle généralité étant superflue pour le but que nous nous proposons actuellement, nous nous restreindrons à la forme de série plus particulière que nous venons de considérer.

§ III.

Reprenons maintenant le problème traité dans le § I; on a, en posant dans l'équation (b), $\varphi(s) = 1$ et par suite $\psi(s) = s$,

$$\mathrm{F}(n) = \sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right] = -\mu\nu + \sum_1^\mu \left[\frac{n}{s}\right] + \sum_1^\nu \left[\frac{n}{s}\right].$$

En mettant dans les deux sommes $\frac{n}{s}$ au lieu de $\left[\frac{n}{s}\right]$, l'erreur est seulement de l'ordre de $\sqrt{n}$, et comme on a, à la même erreur près,

$$n \sum_1^\mu \frac{1}{s} = n \sum_1^\nu \frac{1}{s} = \frac{1}{2} n \log n + \mathrm{C}n, \quad \mu\nu = n,$$

il en résulte, à une erreur près de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$\mathrm{F}(n) = n \log n + (2\,\mathrm{C} - 1)\, n.$$

De l'expression asymptotique que nous venons de trouver pour la fonction $\mathrm{F}(n)$, on peut maintenant déduire facilement une expression de la valeur moyenne du nombre des diviseurs. Écrivons, pour plus d'exactitude, l'équation sous la forme

$$\mathrm{F}(n) = n \log n + (2\,\mathrm{C} - 1)\, n + \zeta \sqrt{n},$$

la quantité ζ étant à la vérité inconnue, mais devant, pour n suffisamment grand, conserver constamment une valeur numérique inférieure à une limite déterminée qu'il serait facile d'assigner. Changeons

n en $n+s$, ζ devenant alors ζ', et divisons par s la différence des deux équations; il vient, pour la moyenne arithmétique des nombres de diviseurs correspondants aux s nombres $n+1, n+2, \ldots, n+s$,

$$\log(n+s) + 2C - 1 + \frac{n}{s}\log\left(1+\frac{s}{n}\right) + \frac{\zeta'\sqrt{n+s} - \zeta\sqrt{n}}{s}.$$

Si l'on imagine maintenant que $\frac{s}{\sqrt{n}}$ croisse au delà de toute limite, le dernier terme convergera vers zéro, c'est-à-dire que la différence entre cette moyenne arithmétique et l'expression formée par les termes restants deviendra plus petite que toute grandeur assignable. Si à la supposition que l'on vient de faire on joint encore celle-ci, que $\frac{n}{s}$ surpasse aussi toute limite, on obtient pour la moyenne correspondante à cette double hypothèse la valeur asymptotique très-simple

$$\log n + 2C,$$

qui, comme on le voit facilement, est encore vraie lorsque n, au lieu de désigner le nombre qui précède immédiatement la suite des s nombres par rapport auxquels est prise la moyenne, coïncide avec un de ces nombres mêmes. Car si m est un de ces nombres, on a $n+t=m$, t étant $\leq s$, et la différence $\log m - \log n$, par suite de la supposition précédente, converge vers zéro.

§ IV.

L'équation obtenue ci-dessus

$$\sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right] = n\log n + (2C-1)n,$$

dans laquelle l'erreur est de l'ordre de $\sqrt{n}$, nous fournit l'occasion d'une remarque sur laquelle nous allons nous arrêter un instant. Comme, d'autre part,

$$\sum_1^n \frac{n}{s} = n\log n + Cn,$$

l'erreur, pour chaque valeur de n, ne dépassant pas une limite con-

stante, on a, avec une erreur de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$\sum_1^n \left(\frac{n}{s} - \left[\frac{n}{s}\right]\right) = (1 - C)\,n.$$

Puisque, d'après cela, la moyenne arithmétique des valeurs de la différence $\frac{n}{s} - \left[\frac{n}{s}\right]$ correspondante à $s = 1, 2, \ldots, n$ est $= 1 - C$, c'est-à-dire $< \frac{1}{2}$, on peut en induire que, si l'on divise successivement n par tous les nombres en question, le cas où le reste sera moindre que la moitié du diviseur se présentera plus souvent que le cas contraire, où le reste serait égal ou supérieur à cette moitié. Nous allons prouver la justesse de cette induction, et déterminer dans quelle proportion les nombres $1, 2, \ldots, n$, se partagent sous ce rapport en deux groupes. Le nombre s présentera le premier cas ou le second, suivant que l'on aura

$$\frac{n}{s} - \left[\frac{n}{s}\right] < \frac{1}{2}, \quad \text{ou bien} \quad > \frac{1}{2}.$$

Comme on a alors respectivement

$$\left[\frac{2n}{s}\right] - 2\left[\frac{n}{s}\right] = 0,$$

ou bien

$$\left[\frac{2n}{s}\right] - 2\left[\frac{n}{s}\right] = 1,$$

le nombre des termes contenus dans le second groupe sera donné par l'expression

$$\sum_1^n \left[\frac{2n}{s}\right] - 2\sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right],$$

dont le second terme a déjà été déterminé ci-dessus. Pour déterminer le premier, on se servira de l'équation (a) en y changeant n en $2n$, et y faisant

$$p = n, \quad q = 2, \quad \varphi(s) = 1, \quad \psi(s) = s.$$

On aura ainsi

$$\sum_1^n \left[\frac{2n}{s}\right] = 2n - \mu\nu + \sum_1^\mu \left[\frac{2n}{s}\right] + \sum^\nu \left[\frac{2n}{s}\right].$$

Puisque μ est le nombre entier immédiatement supérieur à $\sqrt{2n}$, et que $\nu = \left[\frac{2n}{\mu}\right]$, $\mu\nu$ ne diffère donc de $2n$ que d'une quantité de l'ordre de $\sqrt{n}$, et par suite les deux premiers termes se détruisent. Pour la première somme, on obtient, en négligeant toujours les quantités de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$\sum_1^{\mu} \left[\frac{2n}{s}\right] = 2n \sum_1^{\mu} \frac{1}{s} = 2n(\log \mu + C) = n \log 2n + 2Cn.$$

La seconde somme aurait la même valeur s'il n'y manquait pas les deux termes correspondants à $s = 1$ et à $s = 2$. Pour obtenir $\sum_1^n \left[\frac{2n}{s}\right]$, il suffit donc de doubler l'expression que l'on vient de trouver, et d'en retrancher $\left[\frac{2n}{1}\right] + \left[\frac{2n}{2}\right] = 3n$. On trouve donc, pour le nombre des termes du second groupe, $(\log 4 - 1)n$, et par suite, pour le nombre des termes du premier, $(2 - \log 4)n$. Donc, pour une grande valeur de n, le nombre des diviseurs jouissant de la première propriété est au nombre des diviseurs jouissant de la seconde comme $2 - \log 4$ est à $\log 4 - 1$.

§ V.

Considérons maintenant la fonction $f(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n, ou plutôt considérons encore immédiatement, comme au § I, la somme

$$F(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n),$$

formée au moyen de cette fonction. Par des raisonnements tout à fait semblables à ceux que nous avons exposés dans cet endroit, on trouve

$$F(n) = \sum_1^n s \left[\frac{n}{s}\right].$$

On en tire, en faisant usage de l'équation (b),

$$F(n) = -\frac{1}{2}(\mu^2 + \mu)\nu + \sum_1^{\mu} s \left[\frac{n}{s}\right] + \frac{1}{2}\sum_1^{\nu}\left(\left[\frac{n}{s}\right]^2 + \left[\frac{n}{s}\right]\right).$$

Pour voir de quel ordre sont les grandeurs que l'on est forcé de négliger, ne pouvant les déterminer complétement, considérons d'abord la première partie de la dernière somme. Si l'on pose

$$\left[\frac{n}{s}\right] = \frac{n}{s} - \varepsilon,$$

ε étant une fraction dépendante de n et de s et plus petite que l'unité, il vient

$$\sum_1^{\nu} \left[\frac{n}{s}\right]^2 = \sum_1^{\nu} \frac{n^2}{s^2} - 2\sum_1^{\nu} \frac{n}{s}\varepsilon + \sum_1^{\nu} \varepsilon^2,$$

où le deuxième et le troisième terme, qui ont respectivement pour limites supérieures de leurs ordres $n \log n$ et $\sqrt{n}$. sont à négliger à cause de la fraction ε, non exprimable analytiquement, que ces termes renferment. La seconde partie de la somme, c'est-à-dire $\sum_1^{\nu} \left[\frac{n}{s}\right]$, que nous avons déjà déterminée plus haut et qui est de l'ordre de $n \log n$, ne doit pas non plus être conservée, quoique l'on puisse donner cette partie avec une exactitude allant jusqu'au premier ordre inclusivement. Comme on a de plus, en négligeant le premier ordre,

$$(\mu^2 + \mu)\nu = n^{\frac{3}{2}}, \qquad \sum_1^{\nu} s\left[\frac{n}{s}\right] = n^{\frac{3}{2}},$$

il vient alors la relation

$$\mathrm{F}(n) = \frac{1}{2} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} n^2 \sum_1^{\nu} \frac{1}{s^2},$$

exacte à une erreur près de l'ordre de $n \log n$. On a maintenant d'autre part, en vertu d'une formule connue,

$$\sum_1^{\nu} \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\nu^2} - \ldots,$$

et par suite, au premier ordre près,

$$\frac{1}{2} n^2 \sum_1^{\nu} \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{12} n^2 - \frac{1}{2} n^{\frac{3}{2}}.$$

On en conclut finalement l'équation

$$\mathrm{F}(n) = \frac{\pi^2}{12} n^2,$$

dans laquelle l'ordre de l'erreur ne dépasse pas celui de $n \log n$.

Si l'on détermine, à l'aide de l'expression que nous venons de trouver, la valeur moyenne de $f(n)$, on trouve, pour cette valeur moyenne

$$\frac{1}{s}\{f(n+1)+\ldots+f(n+s)\},$$

l'expression asymptotique

$$\frac{\pi^2}{6}n,$$

en supposant que l'on fasse croître simultanément s et n de manière que

$$\frac{n}{s} \quad \text{et} \quad \frac{s}{\log n}$$

surpassent toute limite finie. Ce résultat a cependant, comme il est facile de le voir, une signification essentiellement différente de celle du résultat trouvé à la fin du § III. Tandis que, dans celui-ci, la différence entre la vraie valeur moyenne et son expression asymptotique peut devenir moindre que toute grandeur donnée, cela n'a lieu, dans le cas actuel, que pour le rapport de cette différence à la valeur moyenne exacte ou approchée.

§ VI.

Dans les problèmes que nous avons traités jusqu'ici, et dont la solution peut servir en tout de modèle pour d'autres pareils qu'il nous semble superflu de rapporter, la fonction qu'il s'agissait de déterminer approximativement avait immédiatement la forme de la série (a). Dans d'autres cas, cette fonction est donnée par une équation contenant une série dans le terme général de laquelle se trouve la fonction à déterminer, de sorte que l'on ne connaît ainsi qu'une relation entre des valeurs consécutives de la fonction. L'exemple le plus simple de cette espèce est offert par la fonction $\varphi(n)$, qui exprime combien la suite $1, 2, \ldots, n$ renferme de nombres premiers avec n, et qui joue un si grand rôle dans la théorie des nombres. On sait que cette fonction a pour expression

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots,$$

a, b, c,..., étant les différents nombres premiers qui divisent n. Mais cette formule n'est pas appropriée à nos recherches, et il faut choisir un autre point de départ. Partons de l'équation connue

$$\sum \varphi(\delta) = n,$$

où le signe de sommation s'étend aux différents diviseurs δ de n. Faisant la somme de cette équation et des équations analogues qui ont lieu pour $n-1$, $n-2$,..., 1, le premier membre se trouvera contenir le terme $\varphi(s)$, s étant $\leq n$, autant de fois qu'il y a de multiples de s dans la suite des nombres 1, 2,..., n, c'est-à-dire $\left[\frac{n}{s}\right]$ fois. On a ainsi

$$\sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right] \varphi(s) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons revenir un instant sur la formule (b), et nous remarquerons que, dans un grand nombre de problèmes, dont celui que nous avons traité dans le paragraphe précédent fait partie, on abrége le calcul en étendant la transformation à toute la série, bien que l'on perde par là un avantage indispensable dans d'autres cas, celui de ramener à un ordre inférieur le nombre des termes. Pour obtenir la formule ainsi modifiée, considérons que, t désignant généralement un quelconque des nombres 1, 2,..., n, la valeur de t ne se trouvera pas toujours, il est vrai, parmi les termes

$$\left[\frac{n}{1}\right], \quad \left[\frac{n}{2}\right], \ldots, \quad \left[\frac{n}{s}\right], \ldots, \quad \left[\frac{n}{n}\right],$$

parce que ces termes diminuent très-rapidement au commencement de la série; mais que l'on peut toujours trouver un terme et un seul qui, étant $\geq t$, soit suivi d'un autre ayant une valeur $< t$. L'indice s de ce terme doit, comme précédemment, satisfaire aux inégalités $\frac{n}{s} \geq t$ et $\frac{n}{s+1} < 1$, d'où résulte $s = \left[\frac{n}{t}\right]$. D'après cela, on a généralement $\left[\frac{n}{s}\right] = t$, depuis $s = \left[\frac{n}{t+1}\right]$ exclusivement jusqu'à $s = \left[\frac{n}{t}\right]$ inclusivement; et la somme de tous les termes dans lesquels $\left[\frac{n}{s}\right]$ a la valeur t, est égale à

$\left(\psi\left[\frac{n}{t}\right] - \psi\left[\frac{n}{t+1}\right]\right) t$, expression qui s'évanouit, sans cesser d'être exacte, lorsqu'il n'existe aucun terme ayant cette valeur, c'est-à-dire lorsque $\left[\frac{n}{t}\right] = \left[\frac{n}{t+1}\right]$. Faisant la somme des valeurs de cette expression pour $t = 1, 2, \ldots, n$, et remarquant que, pour $t = n$, le terme $\psi\left[\frac{n}{t+1}\right]$ doit évidemment se réduire à zéro, il vient

$$(c) \qquad \sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right] \varphi(s) = \sum_1^n \psi\left[\frac{n}{s}\right],$$

transformation dont nous allons maintenant faire usage dans notre problème.

Notre équation précédente devient, en vertu de celle-ci,

$$\sum_1^n \psi\left[\frac{n}{s}\right] = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

On voit de suite que l'expression asymptotique de $\psi(n)$ sera de la forme αn^2, α étant une constante. On pourrait, dans la démonstration suivante, laisser d'abord cette constante indéterminée, la suite du développement devant faire connaître plus tard sa valeur $\alpha = \frac{3}{\pi^2}$. Cependant, comme cette valeur est très-facile à apercevoir tout d'abord, nous allons de suite, pour abréger, admettre l'expression $\frac{3}{\pi^2}n^2$. Quelle que puisse être la forme encore inconnue de la fonction $\psi(n)$, on peut poser, en général,

$$\psi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + \zeta\chi(n),$$

ζ dépendant encore de n, et la fonction $\chi(n)$ pouvant être choisie arbitrairement, avec cette seule restriction, qu'elle reste toujours positive, qu'elle croisse avec l'argument, et qu'elle ne s'évanouisse pas pour la valeur $n = 1$ donnée à cet argument. Supposons donc $\chi(n)$ choisie conformément à ces conditions, et remplaçons dans notre équation n successivement par toutes les valeurs, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = N$; les valeurs correspondantes de ζ seront toutes finies. Soit enfin A la plus grande des valeurs numériques de ζ. Cela posé, mettons notre

équation sous la forme

$$\psi(n) = -\sum_2^n \psi\left[\frac{n}{s}\right] + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

et considérons maintenant les valeurs de n comprises depuis $n = \mathrm{N}+1$ jusqu'à $n = 2\,\mathrm{N}$. Dans la somme précédente, $\left[\frac{n}{s}\right]$ ne surpassant pas la limite N, on voit que la partie de cette somme qui résulte de la substitution du second terme de $\psi(n)$ écrite plus haut, est numériquement plus petite que $\mathrm{A}\sum_2^n \chi\left(\frac{n}{s}\right)$. La partie provenant du premier terme, savoir $\frac{3}{\pi^2}\sum_2^n \left[\frac{n}{s}\right]^2$, devient, en posant encore $\left[\frac{n}{s}\right] = \frac{n}{s} - \varepsilon$,

$$\frac{3n^2}{\pi^2}\sum_2^n \frac{1}{s^2} - \frac{6n}{\pi^2}\sum_2^n \frac{\varepsilon}{s} + \frac{3}{\pi^2}\sum_2^n \varepsilon^2.$$

Comme on a maintenant

$$\sum_2^n \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 + \tau,$$

τ étant de l'ordre de $\frac{1}{n}$, et que les ordres des deux autres sommes ne peuvent respectivement surpasser ceux de $\log n$ et de n, il vient

$$\psi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + \xi,$$

ξ étant une quantité numériquement plus petite que

$$\mathrm{P}n\log n + \mathrm{A}\sum_2^n \chi\left(\frac{n}{s}\right),$$

si l'on désigne par P une constante suffisamment grande, indépendante de N. Comparant ce résultat, qui est vrai depuis $n = \mathrm{N}+1$ jusqu'à $n = 2\,\mathrm{N}$, avec l'expression admise précédemment pour $\psi(n)$, savoir $\frac{3}{\pi^2}n^2 + \zeta\chi(n)$, on voit que, dans ce nouvel intervalle, la plus grande valeur numérique de ζ ne surpasse pas le maximum des valeurs que prend, dans cet intervalle, l'expression

$$\frac{\mathrm{P}n\log n}{\chi(n)} + \frac{\mathrm{A}}{\chi(n)}\sum_2^n \chi\left(\frac{n}{s}\right).$$

En donnant maintenant à la fonction $\chi(n)$, laissée jusqu'ici indéterminée, la forme d'une puissance positive n^δ, l'expression multipliée par A devient

$$\sum_2^n \frac{1}{s^\delta} < \sum_2^\infty \frac{1}{s^\delta} = q,$$

et l'on peut choisir δ entre 1 et 2 de telle sorte que la constante q soit une fraction moindre que l'unité. D'un autre côté, on peut prendre N assez grand pour que, pour $n \geq N$, on ait $P\frac{n \log n}{n^\delta} < k$, k étant une constante aussi petite que l'on voudra. En désignant par A' la plus grande des valeurs numériques que prend ζ entre $n = N + 1$ et $n = 2N$, on a

$$A' < Aq + k.$$

Maintenant, puisque k peut, pour N croissant, devenir aussi petit que l'on voudra, et que A ne diminue pas, tandis que q reste constant, il s'ensuit que, pour N suffisamment grand, $A' < A$, c'est-à-dire que la valeur A qui servait à l'origine de maximum jusqu'à $n = N$, en servira aussi jusqu'à 2N, puis par la même raison jusqu'à 4N, 8N,..., ou en général indéfiniment.

On a donc

$$\psi(n) = \frac{3}{\pi^2} n^2,$$

avec une erreur qui ne peut dépasser l'ordre de n^δ, la constante δ surpassant aussi peu que l'on voudra la valeur γ déterminée par l'équation

$$\sum_2^\infty \frac{1}{s^\gamma} = 1.$$

D'après cela, la valeur moyenne de $\varphi(n)$ aura pour expression la formule

$$\frac{6}{\pi^2} n,$$

dont la signification est évidente par ce qui précède.

§ VII.

Nous choisirons pour dernier exemple la fonction $\varphi(n)$, qui ex-

prime le nombre de toutes les décompositions possibles de n en deux facteurs n'ayant pas de diviseur commun, et qui a comme on sait pour expression l'exponentielle 2^ρ, ρ désignant combien il y a de nombres premiers différents qui divisent n. En posant encore

$$\sum_1^n \varphi(s) = \psi(n),$$

$\psi(n)$ dépendra très-simplement de la fonction $F(n)$ que nous avons considérée dans les §§ I et III. En effet, $F(n)$ exprime évidemment combien il y a de couples de nombres x, y satisfaisant à la condition $xy \leq n$, tandis que $\psi(n)$ désigne combien il y a de couples de nombres ξ, η premiers entre eux, et pour lesquels on ait également $\xi\eta \leq n$. Partageons maintenant les couples x, y en groupes dont le $s^{ième}$ contienne ceux des couples x, y qui ont s pour plus grand commun diviseur; de sorte que, en posant

$$x = \xi s, \quad y = \eta s,$$

ξ et η soient des nombres premiers entre eux, et divisons l'inégalité par s^2; il viendra

$$\xi\eta \leq \frac{n}{s^2} \quad \text{ou} \quad \xi\eta \leq \left[\frac{n}{s^2}\right].$$

Réciproquement aussi, deux nombres premiers entre eux ξ, η satisfaisant à cette dernière condition, donnent en les multipliant par s deux nombres x, y ayant pour plus grand commun diviseur s, et pour lesquels $xy \leq n$, d'où il suit que le nombre des couples contenus dans le $s^{ième}$ groupe a pour expression $\psi\left[\frac{n}{s^2}\right]$. On obtient ainsi l'équation

$$\sum \psi\left[\frac{n}{s^2}\right] = F(n) = n \log n + (2C - 1)n,$$

la somme devant être prise depuis $s = 1$ jusqu'à $s = \left[\sqrt{n}\right]$, et le terme négligé ne dépassant pas, d'après ce qu'on a vu, l'ordre de $\sqrt{n}$. Il est facile de voir, d'après cela, que l'expression asymptotique de $\psi(n)$ doit avoir la forme

$$\alpha n \log n + \beta n,$$

α et β désignant deux constantes qu'il reste encore à déterminer. Pour

cela, faisons comme au paragraphe précédent, dans notre équation,

$$\psi(n) = \alpha n \log n + \beta n + \zeta n^{\delta};$$

choisissons α et β de telle sorte que les termes de l'ordre de $n \log n$ et de n se détruisent, ce qui donne les valeurs

$$\alpha = \frac{6}{\pi^2}, \quad \beta = \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{12\,C'}{\pi^2} + 2C - 1\right),$$

où C a toujours la même signification que précédemment, et où

$$C' = \sum_2^{\infty} \frac{\log s}{s^2};$$

on trouve, par des considérations tout à fait analogues à celles qui ont été développées dans le paragraphe précédent, que ζ, pour une valeur de n aussi grande qu'on voudra, reste inférieur à une limite finie, pourvu que l'on ait $\delta > \frac{1}{2}\gamma$, γ désignant la même valeur que ci-dessus. De l'expression que l'on vient de trouver pour $\psi(n)$,

$$\alpha n \log n + \beta n,$$

il résulte pour la valeur moyenne de $\varphi(n)$, prise dans un sens déterminé par ce qui a été dit tout à l'heure,

$$\frac{6}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2C\right).$$

De la question que nous venons de traiter dépend la valeur moyenne donnée dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, art. **301**, pour le nombre des *genres* qui correspondent à un déterminant négatif $-n$. Les expressions du nombre des genres correspondant aux cinq formes linéaires

$$n = 8h, \quad n = 8h + 4, \quad n = 4h + 2, \quad n = 4h + 1 \quad n = 4h + 3,$$

sont, d'après des propositions connues,

$$\varphi(n), \quad \tfrac{1}{2}\varphi(n), \quad \tfrac{1}{2}\varphi(n), \quad \varphi(n), \quad \tfrac{1}{2}\varphi(n).$$

D'un autre côté, en apportant aux considérations exposées précé-

demment des modifications faciles à trouver et dont nous laissons la recherche au lecteur, on peut déterminer la valeur approchée de $\psi(n)$, n ayant une des formes linéaires ci-dessus, et la somme $\sum\varphi(s) = \psi(n)$ devant s'étendre, non plus à tous les nombres $1, 2, \ldots, n$, mais seulement aux nombres de cette suite qui ont la forme linéaire désignée; et l'on en déduira ensuite la valeur moyenne de $\varphi(n)$. On trouve ainsi pour les valeurs moyennes correspondantes aux cinq formes linéaires, en posant, pour abréger, $\log n + \frac{12C'}{\pi^2} + 2C = \Delta$,

$$\frac{8}{\pi^2}\left(\Delta - \frac{8}{3}\log 2\right), \qquad \frac{8}{\pi^2}\left(\Delta - \frac{2}{3}\log 2\right),$$

$$\frac{8}{\pi^2}\left(\Delta + \frac{1}{3}\log 2\right), \quad \frac{4}{\pi^2}\left(\Delta + \frac{4}{3}\log 2\right), \quad \frac{4}{\pi^2}\left(\Delta + \frac{4}{3}\log 2\right).$$

D'après ce qui précède, ces expressions multipliées respectivement par $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$, donnent les nombres moyens des genres du déterminant $-n$ pour les cinq formes linéaires, et comme sur 8 nombres consécutifs il y en a respectivement $1, 1, 2, 2, 2$ contenus dans ces formes, la somme de nos expressions multipliées respectivement par $1\cdot\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}, 1\cdot\frac{2}{8}, \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}$, c'est-à-dire

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\Delta - \frac{1}{6}\log 2\right),$$

sera le nombre moyen cherché des genres qui correspondent au déterminant $-n$, celui-ci étant pris avec toute sa généralité, c'est-à-dire n'étant plus restreint à une forme linéaire particulière : résultat qui coïncide avec celui que l'on trouve à l'endroit cité. Cette expression est vraie aussi pour le déterminant positif n : c'est ce qu'il est aisé de conclure de ce que les valeurs moyennes de $\varphi(n)$ correspondantes aux formes linéaires $4h+1$, $4h+3$, coïncident, et que d'ailleurs les exceptions qui proviennent des déterminants carrés sont évidemment sans influence sur le résultat final.

SUR

UN PROBLÈME RELATIF A LA DIVISION;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

[Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin*, Janvier 1851.]

TRADUCTION DE M. J. HOUEL.

Dans un précédent Mémoire [*], j'ai fait remarquer en passant que, si l'on divise un nombre entier n par tous ceux qui ne lui sont pas supérieurs, le cas où le reste est au-dessous de la moitié du diviseur se présente plus fréquemment que le cas contraire, où le reste égale ou surpasse cette moitié; et j'ai montré en même temps que le rapport du nombre des diviseurs qui se trouvent dans le premier cas au nombre total n des diviseurs converge, pour une valeur indéfiniment croissante de n, vers la limite $2 - \log 4 = 0{,}61370\ldots$. Il est, je pense, assez intéressant de généraliser ces recherches, et de déterminer le nombre h de ceux des diviseurs $1, 2, \ldots, p$ (p étant $\leqq n$), auxquels correspond un reste dont le rapport au diviseur soit inférieur à une fraction donnée α moindre que l'unité. En employant les crochets pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans la quantité qu'ils renferment, de sorte que la différence $x - [x]$ soit toujours nulle ou positive, mais < 1; il est facile de voir que le diviseur s jouira ou ne jouira pas de la propriété en question, suivant que la différence

[*] *Sur la détermination des valeurs moyennes dans la théorie des nombres;* Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1849. — C'est le Mémoire ci-dessus.

$\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s} - \alpha\right]$ aura pour valeur $+1$ ou zéro. On a donc

$$h = \sum_{1}^{p} \left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s} - \alpha\right]\right) = \sum_{1}^{p} \left[\frac{n}{s}\right] - \sum_{1}^{p} \left[\frac{n}{s} - \alpha\right],$$

le signe de sommation étant ici, comme dans tout ce qui va suivre, relatif à s. Sous cette forme, l'expression de h est peu propre au calcul numérique, et ne fait rien savoir sur la manière dont varie h pour des valeurs croissantes de n et de p. Mais on peut lui faire prendre une forme appropriée à ce double but au moyen de la transformation suivante, qui est encore applicable dans une foule d'autres cas.

Soit $y = f(x)$ une fonction qui aille toujours en décroissant, tandis que la variable x croît depuis $x = \mu$ jusqu'à $x = p$. La fonction inverse $x = \mathrm{F}(y)$ présentera évidemment le même caractère, et ira toujours en décroissant pendant que la variable y croîtra depuis $y = f(p)$ jusqu'à $y = f(\mu)$. Supposons que les constantes μ et p soient des nombres entiers ; faisons, pour abréger, $[f(\mu)] = \nu$, $[f(p)] = q$, et formons la suite

$$[f(\mu)], \quad [f(\mu + 1)], \ldots, \quad [f(s)], \ldots, \quad [f(p)],$$

dont chaque terme est égal au suivant ou lui est supérieur : nous allons maintenant déterminer quels sont les termes de cette suite égaux à un nombre entier t pris arbitrairement entre q et ν. Pour cela, cherchons d'abord l'indice (lequel est complétement déterminé) du terme dont la valeur est $\geqq t$, tandis que le terme suivant est $< t$. On a ainsi

$$[f(s)] \geqq t, \quad [f(s+1)] < t,$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(s) \geqq t, \qquad f(s+1) < t,$$

d'où résulte, en vertu de l'hypothèse faite sur la fonction $f(x)$,

$$s \leqq \mathrm{F}(t), \quad s + 1 > \mathrm{F}(t+1),$$

c'est-à-dire

$$s = [\mathrm{F}(t)].$$

En appliquant ce résultat à t et à $t+1$, on voit que la valeur t ne convient qu'aux termes dont les indices s satisfont à la double condition

$$s > [F(t+1)] \quad \text{et} \quad s \leq [F(t)].$$

Ce résultat doit être modifié à chacune des deux extrémités de la série : pour $t = \nu$, la première condition devient $s \geq \mu$, et, pour $t = q$, il faut, au lieu de la seconde condition, prendre $s \leq p$. Il est facile maintenant, en s'appuyant sur ce résultat, de transformer la somme

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\varphi(s),$$

où $\varphi(s)$ désigne une fonction tout à fait arbitraire, en réunissant d'abord tous les termes dans lesquels $[f(s)]$ a une seule et même valeur, et en ajoutant ensuite toutes les sommes partielles ainsi obtenues. Posant $\sum_{1}^{s} \varphi(s) = \psi(s)$, on obtient, pour la somme partielle dans laquelle $[f(s)]$ a une valeur t telle que $q < t < \nu$,

$$t\{\psi[F(t)] - \psi[F(t+1)]\},$$

et respectivement pour les valeurs répondant à $t = \nu$ et à $t = q$,

$$\nu\{\psi[F(\nu)] - \psi(\mu)\} \quad \text{et} \quad q\{\psi(p) - \psi[F(q+1)]\},$$

et par suite

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\varphi(s) = q\psi(p) - \nu\psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu} \psi[F(s)].$$

Maintenant mettons à part les μ premiers termes de chacune des deux sommes dont se compose l'expression de h donnée plus haut, et appliquons aux termes restants la formule que nous venons de trouver : on a ainsi

$$\sum_{\mu+1}^{p} \left[\frac{n}{s}\right] = \sum_{q+1}^{\nu} \left[\frac{n}{s}\right] + pq - \mu\nu,$$

où

$$\left[\frac{n}{\mu}\right] = \nu \quad \text{et} \quad \left[\frac{n}{p}\right] = q,$$

et

$$\sum_{\mu+1}^{p}\left[\frac{n}{s}-\alpha\right] = \sum_{q'+1}^{\nu'}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] + pq' - \mu\nu',$$

où

$$\left[\frac{n}{\mu}-\alpha\right] = \nu' \quad \text{et} \quad \left[\frac{n}{p}-\alpha\right] = q'.$$

Posons, pour abréger,

$$\nu - \nu' = \delta, \quad q - q' = \varepsilon,$$

δ et ε ne pouvant avoir pour valeur que zéro ou l'unité; mettons la dernière somme sous la forme

$$\sum_{q'+1}^{\nu'}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] = \sum_{q+1}^{\nu}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] + \varepsilon\left[\frac{n}{q+\alpha}\right] - \delta\left[\frac{n}{\nu+\alpha}\right],$$

et substituons; il vient

$$h = \sum_{1}^{\mu}\left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s}-\alpha\right]\right) + \sum_{q+1}^{\nu}\left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s+\alpha}\right]\right)$$
$$+ \left(p - \left[\frac{n}{q+\alpha}\right]\right)\varepsilon - \left(\mu - \left[\frac{n}{\nu+\alpha}\right]\right)\delta.$$

Bien que la transformation que nous venons d'effectuer soit applicable à toutes les valeurs de p, elle n'est avantageuse que dans le cas où p est plus grand que $\sqrt{n}$, et, dans cette supposition, elle l'est le plus possible lorsque, comme nous allons le faire tout à l'heure, on choisit pour le nombre μ, laissé jusqu'ici arbitraire, un des nombres entiers voisins de $\sqrt{n}$. Alors, comme il est aisé de le voir, le nombre des divisions nécessaires pour la détermination exacte de h se réduit à peu près à $2\sqrt{n} - \frac{n}{p}$, tandis que la formule primitive exigeait p divisions.

Actuellement, en supposant que p soit d'un ordre plus élevé que $\sqrt{n}$, c'est-à-dire que $\frac{p}{\sqrt{n}}$ croisse en même temps que n au delà de toute limite, nous allons chercher à déterminer la valeur limite du rapport $\frac{h}{p}$ du nombre des diviseurs jouissant de la propriété en question au nombre total p des diviseurs. On peut, dans cette recherche, omettre dans l'expression de h tous les termes d'un ordre inférieur à celui de p. En négligeant le premier terme dont l'ordre ne peut surpasser celui de $\sqrt{n}$, ainsi que le quatrième qui ne peut contenir qu'un nombre fini d'unités, il vient

$$h = \sum_{q+1}^{\nu} \left(\left[\frac{n}{s} \right] - \left[\frac{n}{s+\alpha} \right] \right) + \left(p - \left[\frac{n}{q+\alpha} \right] \right) \varepsilon,$$

ou bien encore en supprimant les crochets, ce qui produit une variation d'un ordre ne pouvant évidemment surpasser celui de $\sqrt{n}$,

$$h = n \sum_{q+1}^{\nu} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) + \left(p - \frac{n}{q+\alpha} \right) \varepsilon.$$

Si nous remplaçons la limite supérieure ν par ∞, la somme subit l'accroissement $\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+1-\alpha} + \frac{1}{\nu+2} - \ldots < \frac{1}{\nu+1}$, lequel, multiplié par n, ne dépasse pas non plus l'ordre de $\sqrt{n}$. On a ainsi

$$\lim \frac{h}{p} = \frac{n}{p} \sum_{q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) + \left(p - \frac{n}{q+\alpha} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{p}.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas : celui où le quotient $\frac{n}{p}$, qui est par hypothèse $\geqq 1$, croît au delà de toute limite, et celui où ce quotient reste fini. Dans le premier cas, le second terme converge vers zéro, tandis que la somme contenue dans le premier est à $\frac{\alpha}{q}$ dans un rapport ayant l'unité pour limite, de sorte que la limite de $\frac{h}{p}$ coïncide avec celle de $\frac{n}{pq}\alpha$, c'est-à-dire avec α.

Dans le second cas, où $\frac{n}{p}$ et par suite $q = \left[\frac{n}{p}\right]$ restent finis, il est utile de mettre sous une autre forme la valeur limite de $\frac{h}{p}$ donnée immédiatement par la dernière équation, en introduisant au lieu d'une somme unique la différence de deux autres sommes prises depuis $s = 1$ respectivement jusqu'à $s = \infty$ et $s = q$, puis en exprimant la première par une intégrale. Notre équation devient ainsi

$$\lim \frac{h}{p} = \frac{n}{p}\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi - \frac{n}{p}\sum_1^q \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) + \left(1 - \frac{n}{p}\cdot\frac{1}{q+\alpha}\right)\varepsilon,$$

et cette intégrale, qui, pour toute valeur rationnelle de α, est exprimable en fonctions logarithmiques et circulaires, est une transcendante connue, et qui a été l'objet de nombreuses recherches. Si l'on fait en particulier $p = n$, il vient

$$q = 1, \quad q' = 0, \quad \varepsilon = 1,$$

et l'expression limite devient

$$\lim \frac{h}{p} = \int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi.$$

A l'aide des Tables de cette transcendante données par Gauss dans le Mémoire intitulé *Disq. gener. circa seriem, etc.*, on peut facilement déterminer la valeur de α à laquelle correspond une valeur donnée de l'intégrale, et l'on trouve par exemple, si l'on veut que le rapport du reste au diviseur soit au-dessous de α pour *la moitié* des diviseurs $1, 2, \ldots, n$, qu'il faut prendre $\alpha = 0{,}384686\ldots$.

SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) \quad \text{où} \quad \alpha < 1\,;$$

PAR M. V. A. LEBESGUE.

PROBLÈME. *Si le nombre n est divisé successivement par les nombres* 1, 2, 3,..., *n, pour un certain nombre h de diviseurs, le rapport du reste de la division au diviseur tombera au-dessous de* $\alpha < 1$. *Pour les autres diviseurs, ce rapport sera* $=$ *ou* $> \alpha$. *On demande la limite du rapport* $\frac{h}{n}$, *quand n devient de plus en plus grand.*

Dans l'article précédent, M. Lejeune-Dirichlet a trouvé pour cette limite

$$\lim \frac{h}{n} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right).$$

Si on la met sous la forme

$$\lim \frac{h}{n} = 1 + \sum_2^\infty \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-(1-\alpha)}\right],$$

en posant

$$1-\alpha = \beta,$$

et à cause de

$$\frac{1}{s-\beta} = \frac{1}{s}\left(1 + \frac{\beta}{s} + \frac{\beta^2}{s^2} + \frac{\beta^3}{s^3} + \dots\right),$$

on aura

$$\lim \frac{h}{n} = 1 - \beta \sum_2^\infty \frac{1}{s^2} - \beta^2 \sum_2^\infty \frac{1}{s^3} - \dots. \tag{1}$$

Comme Euler a donné les sommes $\sum_1^\infty \frac{1}{s^m}$ avec seize décimales, on trouvera facilement l'expression numérique de $\lim \frac{h}{n}$.

Quand on pose

$$\alpha = \frac{a}{p}, \quad \sum \frac{1}{s} = \sum \frac{p}{ps}, \quad \sum \frac{1}{s+\alpha} = \sum \frac{p}{ps+a},$$

on trouve

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) = \frac{p}{a} + p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p} \cdots \right) - p \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{p+a} + \frac{1}{2p+a} + \cdots \right),$$

ou

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) = \frac{p}{a} + p \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{a-1}}{1-x^p} \, dx;$$

mais

$$\frac{p}{a} = p \int_0^1 x^{a-1} \, dx;$$

donc enfin

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) = p \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{a+p-1}}{1-x^p} \, dx = \int_0^1 \frac{1-\varphi^{\alpha}}{1-\varphi} \, d\varphi,$$

en posant $x^p = \varphi$.

Si l'on fait

$$\mathrm{I}_{\alpha} = \int_0^1 \frac{1-\varphi^{\alpha}}{1-\varphi} \, d\varphi, \quad \alpha = \frac{a}{p},$$

on trouvera par les formules connues

$$(2) \qquad \mathrm{I}_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \log 2p - \frac{\pi}{2} \cot \alpha\pi + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} \cos \alpha . 2s\pi . \log \sin s . \frac{\pi}{p}.$$

Cette formule suppose p impair ; pour p pair, les limites de la somme $\sum$ deviendraient 1 et $\frac{p}{2} - 1$.

De cette formule on tirerait encore

$$(3) \qquad \mathrm{I}_{1-\alpha} - \mathrm{I}_{\alpha} = \frac{2\alpha - 1}{\alpha(1-\alpha)} + \pi \cot \alpha\pi.$$

Mais la formule (1) paraît plus propre au calcul numérique, surtout quand p n'est pas un petit nombre.

NOTE

SUR

LE GYROSCOPE DE M. FOUCAULT;

PAR M. J. BERTRAND.

Tous les savants connaissent aujourd'hui l'ingénieux appareil auquel M. Léon Foucault a donné le nom de *gyroscope*. Je me dispenserai donc d'en reproduire ici la description, et il me suffira de rappeler qu'il se compose essentiellement d'un corps solide de révolution tournant rapidement autour de son axe de figure, tandis que celui-ci est obligé, par la nature du système, de rester sur un plan fixe par rapport à la surface de la terre. Le mouvement de l'axe du gyroscope sur ce plan est d'ailleurs entièrement libre.

C'est dans les principes découverts par M. Poinsot qu'il faut chercher l'explication presque intuitive des phénomènes observés, et la Note que l'on va lire n'est qu'un corollaire de l'admirable Mémoire composé il y a vingt ans par l'illustre géomètre, et publié en entier dans le tome XVI (1re série) de ce Journal.

On sait que M. Poinsot regarde chaque molécule d'un corps en mouvement comme animée d'une force égale au produit de la masse par sa vitesse. Toutes les forces qui, à un instant donné, animent les molécules d'un corps solide en mouvement, peuvent être composées suivant les règles de la statique et réduites à une force et à un couple; cette force et ce couple sont invariables si le corps solide est libre, et qu'aucune force extérieure ne le sollicite. Mais si des forces extérieures viennent joindre leur influence à celle de l'inertie, le système des forces qui animent le corps après un temps infiniment petit dt, peut être considéré comme composé de deux autres: 1° le système des forces *finies* qui animaient le corps au commencement de l'instant considéré; 2° le système des forces extérieures qui ont agi sur le corps, multipliées chacune par la durée dt de l'instant considéré.

Ce principe fondamental a conduit M. Poinsot à ses plus beaux théorèmes, et il suffit, comme on va le voir, pour expliquer complétement les phénomènes découverts par M. Foucault.

Je suppose l'appareil disposé de telle sorte, que l'axe de rotation qui est l'axe de symétrie du tore soit assujetti à rester sur un plan P, fixe par rapport à la Terre. Soit o le centre de l'instrument, que nous supposerons fixe. Ne nous occupons que du mouvement du système autour de ce point, et réduisons, par conséquent, toutes les forces aux couples qu'elles produisent.

Soient oA la position actuelle de l'axe de rotation dans le plan P, et oI la parallèle à l'axe du monde menée par le point o.

Pour que l'axe oA restât en *repos apparent* sur le plan P, il faudrait qu'en réalité il tournât autour de oI avec une vitesse égale à celle de la Terre, et décrivît en vingt-quatre heures un cône de révolution. Soit, sur ce cône, oA′ la position infiniment voisine de oA. Dans le premier instant, le gyroscope tournant autour de oA, le couple qui l'anime a son axe dirigé suivant oA et égal au produit du moment d'inertie μ, par la vitesse angulaire ω. Pour que cet axe, que nous représenterons par oG, devienne dans l'instant suivant oG′ (dirigé suivant oA′), il faut que, pendant l'instant infiniment petit dt, le système ait été sollicité par un couple dont l'axe soit dirigé suivant GG′, et dont l'intensité soit représentée par

$$\frac{GG'}{dt}.$$

Or, la seule action qui s'exerce directement sur l'instrument est la réaction du plan fixe P; cette réaction ne peut produire que des forces perpendiculaires au plan P, et, par suite, un couple dont l'axe sera situé dans ce plan; il faut donc que la droite GG′ soit parallèle au plan P, et, pour cela, que ce plan soit tangent au cône, et, par suite, perpendiculaire au plan IoA. Nous avons donc ce premier théorème:

L'axe du gyroscope étant assujetti à rester sur un plan P, *il ne peut rester en équilibre que s'il coïncide avec la projection sur le plan de la parallèle à l'axe du monde.*

Lorsque la coïncidence dont nous venons de parler n'a pas lieu à

l'origine, l'équilibre relatif est impossible, et l'instrument fait des oscillations dont nous devons calculer les lois.

Et d'abord remarquons que, quelle que soit la position initiale oA de l'axe, on peut appliquer à l'instrument le couple nécessaire pour maintenir l'axe en repos apparent sans changer la vitesse de rotation, pourvu que l'on applique le couple égal et contraire. Or ce couple, d'après la démonstration du théorème précédent, a pour axe une perpendiculaire au plan IoA, et en nommant

μ le moment d'inertie du gyroscope;
ω la vitesse de rotation de la Terre;
ω_1 la vitesse angulaire de l'instrument;

le moment de ce couple est, comme on le voit immédiatement,

$$\mu\omega\omega_1 \sin IoA;$$

et, puisque ce couple maintient l'axe du gyroscope en repos apparent, c'est le couple égal et contraire qui fait glisser l'instrument sur le limbe.

Ce couple est décomposable en deux autres, l'un dont l'axe est situé dans le plan du limbe et qui sera détruit, l'autre seul efficace, dont l'axe perpendiculaire au plan du limbe est représenté par

$$\mu\omega\omega_1 \sin IoA \cos(\overline{P}, \overline{IoA}),$$

$(\overline{P}, \overline{IoA})$ désignant l'angle dièdre formé par le plan P avec le plan IoA. Or, dans le trièdre formé par les droites oA, oI et par la projection oH de oI sur le plan P, on a

$$\sin IoA \cos(P, IoA) = \cos IoH \sin AoH;$$

et comme l'angle IoH est constant, on voit que le couple *accélérateur* est proportionnel au sinus de l'écart entre la position actuelle de l'axe et sa position d'équilibre. De là résulte que la loi des oscillations est celle du pendule simple, et que leur durée est proportionnelle à la racine carrée du cosinus de l'angle formé par l'axe du monde avec le plan P.

Telle est l'explication très-simple des phénomènes observés. Je dois

faire remarquer, toutefois, qu'après avoir trouvé l'expression du couple qui pousse l'instrument, il faut encore expliquer pourquoi la vitesse acquise tend à se conserver, car il n'y a pas là, comme dans le cas d'un point matériel, *inertie* proprement dite. On sait, en effet, que l'axe oA étant animé d'un mouvement de translation sur le limbe, l'instrument ne tourne pas rigoureusement autour de oA, mais autour d'un axe faisant un petit angle avec oA et situé dans le plan mené par oA perpendiculairement au limbe. Cet axe de rotation n'étant pas un axe principal d'inertie, tend à se déplacer et à décrire un petit cône; mais pour décrire ce cône, il lui faudrait pénétrer à travers le limbe, dont le plan résiste et produit un couple qui le relève et lui conserve purement et simplement sa vitesse tangente au plan P, et que vient accroître le couple accélérateur calculé plus haut.

J'ajouterai enfin que le petit angle formé par l'axe du gyroscope avec l'axe véritable de rotation ayant été négligé, les formules trouvées ne sont que très-approximatives, et c'est pour cela qu'elles ne coïncident pas avec les résultats rigoureux obtenus par la méthode très-savante, mais beaucoup plus difficile, de M. Bour.

NOTE

SUR

LES FONCTIONS DE QUATRE ET DE CINQ LETTRES;

PAR M. JAMES COCKLE,

de l'Université et de la Société Philosophique de Cambridge, de la Société Astronomique de Londres, etc.

---

1. Soient

$$p^5, \quad q^5, \quad r^5, \quad s^5$$

les quatre fonctions résolvantes de Lagrange qui se présentent vers le commencement de la page 62 du Mémoire de M. J.-A. Serret (*voir* le cahier de Janvier 1850). Désignons par

$$\psi(a) \quad \text{ou} \quad \psi(a, b, c, d, e)$$

la fonction à laquelle M. Serret a été conduit vers la fin de la même page. Ces deux espèces de fonctions sont liées l'une à l'autre par la relation

$$pqrs = \varphi(a) - 5\psi(a),$$

où φ est une fonction symétrique des cinq lettres.

2. La somme des racines cinquièmes de l'unité est zéro : donc, en faisant

$$A = a - e, \quad B = b - e, \quad C = c - e, \quad D = d - e,$$

on voit que les égalités

$$P = A + \alpha B + \alpha^2 C + \alpha^3 D = p - (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)\, e = p,$$

sont *identiques*. Les égalités correspondantes

$$Q = q, \quad R = r, \quad S = s$$

le sont aussi. Moyennant ces formules, on peut constater la relation

$$PQRS = \varphi(A) - 5\psi(A),$$

où φ est encore symétrique.

3. En posant

$$\frac{\psi(A)}{ABCD} = \rho(A),$$

et faisant subir à ρ les substitutions indiquées par

$$(A, B), \quad (A, C), \quad (A, D), \quad (B, D) \quad \text{et} \quad (C, D),$$

on obtient

$$\rho_1(A) = \frac{A}{B} + \frac{B}{D} + \frac{D}{C} + \frac{C}{A},$$

$$\rho_2(A) = \frac{B}{A} + \frac{A}{D} + \frac{D}{C} + \frac{C}{B},$$

$$\rho_3(A) = \frac{C}{B} + \frac{B}{D} + \frac{D}{A} + \frac{A}{C},$$

$$\rho_4(A) = \frac{D}{B} + \frac{B}{A} + \frac{A}{C} + \frac{C}{D},$$

$$\rho_5(A) = \frac{A}{D} + \frac{D}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{A},$$

$$\rho_6(A) = \frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{D} + \frac{D}{A},$$

d'où il suit que les six valeurs de ρ se distribuent dans trois paires, (ρ_1, ρ_4), (ρ_2, ρ_6) et (ρ_3, ρ_5). C'est ce qui fait voir que les coefficients de l'équation cubique

$$(\xi - \rho_1 - \rho_4)(\xi - \rho_2 - \rho_6)(\xi - \rho_3 - \rho_5) = 0,$$

sont des fonctions symétriques des lettres A, B, C, D.

4. Quand le produit $pqrs$ s'annule, l'équation dont les racines sont a, b, c, d, e peut se résoudre, conséquence que j'ai tirée ailleurs (*voir* la page 124 de mon Mémoire dans le *Philosophical Magazine* de Londres, cahier d'Août 1856).

SUR

QUELQUES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

ET SUR

LES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

En exprimant les fonctions symétriques d'un nombre quelconque de quantités en fonction des sommes de puissances semblables des mêmes quantités, on obtient en général des formules assez compliquées. Par cette raison, je ne crois pas inutile d'indiquer quelques fonctions symétriques pour lesquelles ces formules deviennent très-simples.

Si l'on désigne n quantités quelconques par a, b, c,..., la somme des expressions de la forme

$$(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^k,$$

qu'on obtient en faisant toutes les combinaisons des signes $\pm$, sera évidemment une fonction symétrique des quantités a, b, c,.... De même, si l'on prend la somme de toutes les expressions de la forme

$$\pm (\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^k,$$

le signe placé en dehors des parenthèses étant le produit des signes placés au dedans, cette somme sera une fonction symétrique des quantités a, b, c,.... Ces deux sommes étant désignées respectivement par P_k et R_k, je vais établir les formules qui font connaître les expressions P_k et R_k en fonction des sommes de puissances semblables des quantités a, b, c,..., mêmes.

§ I.

Soit

$$(1) \qquad F(x) = (e^{ax} + e^{-ax})(e^{bx} + e^{-bx})(e^{cx} + e^{-cx})\ldots.$$

En développant ce produit, on aura

$$F(x) = \sum e^{x(\pm a \pm b \pm c \pm \dots)},$$

où le signe de sommation s'étend à toutes les combinaisons des signes $\pm$ dans l'exposant. Le second membre développé en série donne

$$F(x) = 2^n + P_1 x + P_2 \cdot \frac{x^2}{1.2} + P_3 \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \dots,$$

où les lettres n, P_1, P_2, P_3, .., ont le sens indiqué plus haut. Or il est évident que l'expression P_k s'annule pour les valeurs impaires du nombre k : ainsi l'on a

$$(II) \qquad F(x) = 2^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_{2k}}{1.2.3\dots 2k} x^{2k}.$$

D'un autre côté, en différentiant le logarithme du produit (I), on obtient

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = a \cdot \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} + b \cdot \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{e^{bx} + e^{-bx}} + c \cdot \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{cx} + e^{-cx}} + \dots,$$

$F'(x)$ étant la dérivée de $F(x)$. Développons les divers termes du second membre en séries, et désignons par S_k la somme des puissances semblables $k^{ièmes}$ des quantités a, b, c,.... Il vient alors

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 . S_2 . x - \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_2 . S_4 . x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2.3.4.5.6} \cdot B_3 . S_6 . x^5 - \dots.$$

ou, en employant le signe de sommation,

$$(III) \qquad F'(x) = F(x) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1.2.3\dots 2k} B_k . S_{2k} . x^{2k-1},$$

où les lettres B_1, B_2, B_3,..., désignent les nombres de Bernoulli conformément à l'usage. En portant dans cette formule les expressions de

F (x) et F$'(x)$ tirées de la formule (II), on aura

$$(\mathrm{IV})\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum \frac{2k\,.\,\mathrm{P}_{2k}}{1.2.3\ldots 2k}\cdot x^{2k-1}\\ \displaystyle=\left\{2^n+\sum\frac{\mathrm{P}_{2k}}{1.2.3\ldots 2k}x^{2k}\right\}\cdot\sum(-1)^{k-1}\cdot\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1.2.3\ldots 2k}\cdot \mathrm{B}_k\,.\,\mathrm{S}_{2k-1}\,.\,x^{2k-1},\end{array}\right.$$

où toutes les sommations s'étendent aux valeurs de $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

Si l'on fait

$$x = y\,.\,\sqrt{-1}$$

et

$$\frac{2^k(2^{2k}-1)}{1.2.3\ldots 2k}\cdot \mathrm{B}_k\,.\,\mathrm{S}_{2k} = s_{2k},$$

$$\frac{(-1)^k}{2^n}\cdot\frac{\mathrm{P}_{2k}}{1.2.3\ldots 2k} = p_{2k},$$

la formule (IV) se change en celle-ci :

$$\sum s_{2k}\,.\,y^{2k-1}+\left(\sum p_{2k}\,.\,y^{2k}\right)\cdot\left(\sum s_{2k}\,.\,y^{2k-1}\right)+\sum 2k\,.\,p_{2k}\,.\,y^{2k-1}=0.$$

En égalant à zéro le coefficient de y^{2m-1}, m étant un nombre quelconque, on obtient la relation suivante :

$$s_{2m}+s_{2m-2}\,.\,p_2+s_{2m-4}\,.\,p_4+\ldots+s_2\,.\,p_{2m-2}+2m\,.\,p_{2m}=0,$$

qui a précisément la forme des formules de Newton. On en conclut le théorème que voici :

En désignant par P_k *la somme des expressions de la forme*

$$(\pm a\pm b\pm c\pm\ldots)^k,$$

et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *les* $2m$ *racines de l'équation*

$$2^n\,.\,1.2\ldots 2m\,.\,z^{2m}-\mathrm{P}_2\,.\,3.4\ldots 2m\,.\,z^{2m-2}$$
$$+\mathrm{P}_4\,.\,5.6\ldots 2m\,.\,z^{2m-4}-\ldots\pm\mathrm{P}_{2m}=0,$$

on a l'égalité

$$1.2.3\ldots 2\mu\,.\,(\alpha^{2\mu}+\beta^{2\mu}+\gamma^{2\mu}+\ldots)$$
$$=2^{2\mu}(2^{2\mu}-1)\,.\,\mathrm{B}_\mu\,.\,(a^{2\mu}+b^{2\mu}+c^{2\mu}+\ldots),$$

la lettre μ *désignant un nombre entier positif quelconque* $\leq m$.

Par suite, on peut faire usage des formules connues, qui déterminent les coefficients d'une équation en fonctions des sommes de puissances semblables des racines, pour en déduire immédiatement les formules cherchées.

§ II.

Soit

$$(V) \qquad \Phi(x) = (e^{ax} - e^{-ax})(e^{bx} - e^{-bx})(e^{cx} - e^{-cx})\ldots.$$

En développant ce produit, on aura

$$\Phi(x) = \sum [\pm e^{x(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)}],$$

le signe placé devant la lettre e étant le produit des signes contenus dans l'exposant. En développant en série et en conservant la définition que nous avons donnée de la lettre R_k plus haut, il vient

$$(VI) \qquad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{R_k}{1.2.3\ldots k} \cdot x^k.$$

Or il est visible que les séries qu'on peut substituer aux divers facteurs du produit (V) commencent respectivement par

$$2ax, \quad 2bx, \quad 2cx, \ldots,$$

et que ces séries ne contiennent que les puissances impaires de x. Par suite, le développement de $\Phi(x)$ doit commencer par le terme

$$2^n . a.b.c\ldots x^n,$$

et il ne contiendra que les puissances paires ou impaires de x, suivant que le nombre n est pair ou impair. L'équation (VI) pourra donc s'écrire de la manière suivante :

$$(VII) \qquad \Phi(x) = x^n . \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1.2.3\ldots(n+2k)} \cdot x^{2k},$$

et, d'après ce que nous venons d'observer, on aura d'ailleurs l'égalité

$$\text{(VIII)} \qquad R_n = 2^n.1.2.3\ldots n.a.b.c\ldots$$

D'un autre côté, en différentiant le logarithme du produit (V), on obtient

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = a.\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{ax}-e^{-ax}} + b.\frac{e^{bx}+e^{-bx}}{e^{bx}-e^{-bx}} + c.\frac{e^{cx}+e^{-cx}}{e^{cx}-e^{-cx}} + \ldots,$$

$\Phi'(x)$ étant la dérivée de $\Phi(x)$. En développant en séries les divers termes du second membre et en conservant la notation employée plus haut,

$$S_k = a^k + b^k + c^k + \ldots,$$

on aura

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{n}{x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1}.\frac{2^{2k}.B_k}{1.2.3\ldots 2k}.S_{2k}.x^{2k-1}.$$

En portant dans cette formule les expressions de $\Phi(x)$ et $\Phi'(x)$ tirées de l'équation (VII), on obtient

$$\text{(IX)}\left\{\begin{array}{l} x^{n-1}.\displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(n+2k)\,R_{n+2k}}{1.2.3\ldots(n+2k)}.x^{2k} = n.x^{n-1}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{R_{n+2k}}{1.2.3\ldots(n+2k)}.x^{2k} \\ \quad + x^n.\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{R_{n+2k}}{1.2.3\ldots(n+2k)}.x^{2k}\right).\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k+1}.\frac{2^{2k}.B_k}{1.2.3\ldots 2k}.S_{2k}.x^{2k-1}\right). \end{array}\right.$$

Si l'on fait

$$\varpi_{2k} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(n+2k)}.\frac{R_{n+2k}}{R_n},$$

$$\sigma_{2k} = (-1)^k.\frac{2^{2k}.B_k}{1.2.3\ldots 2k}.S_{2k},$$

l'équation (IX) se change en celle-ci :

$$\text{(X)}\left\{\begin{array}{l} x^{n-1}.\displaystyle\sum\frac{R_n}{1.2\ldots n}(n+2k)\,\varpi_{2k}.x^{2k} \\ = n.x^{n-1}\displaystyle\sum\frac{R_n}{1.2\ldots n}.\varpi_{2k}.x^{2k} - x^n.\left(\sum\frac{R_n}{1.2.n}.\varpi_{2k}.x^{2k}\right).\left(\sum\sigma_{2k+2}.x^{2k+1}\right), \end{array}\right.$$

où toutes les sommations commencent par la valeur $k = 0$.

Supposons maintenant qu'aucune des quantités a, b, c,..., ne soit égale à zéro. Alors l'équation (VIII) fait voir que la valeur de R_n est différente de zéro. On peut donc dégager l'équation (X) du facteur commun $\frac{x^{n-1}.R_n}{1.2...n}$. Cela fait, cette équation peut s'écrire comme il suit :

$$\sum 2k.\varpi_{2k}.x^{2k} + \left(\sum \varpi_{2k}.x^{2k}\right).\left(\sum \sigma_{2k+2}.x^{2k+2}\right) = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de x^{2m}, m étant un nombre quelconque, on obtient la relation

$$\sigma_{2m} + \sigma_{2m-2}.\varpi_2 + \sigma_{2m-4}.\varpi_4 + \ldots + \sigma_2.\varpi_{2m-2} + 2m.\varpi_{2m} = 0.$$

En comparant cette relation avec les formules de Newton, on en déduit le théorème suivant :

En désignant par R_k *la somme des expressions de la forme*

$$\pm(\pm a \pm b \pm c\ldots)^k,$$

et par α, β, γ,..., *les* $2m$ *racines de l'équation*

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+2m).R_n.z^{2m} + (n+3)(n+4)\ldots(n+2m)R_{n+2}.z^{2m-2} + (n+5)(n+6)\ldots(n+2m).R_{n+4}.z^{2m-4} + \ldots + R_{n+2m} = 0,$$

on a l'égalité

$$1.2.3\ldots 2\mu.(\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \ldots) = (-1)^{\mu}.2^{2\mu}.B_{\mu}.(a^{2\mu} + b^{2\mu} + c^{2\mu} + \ldots)$$

pour toutes les valeurs de $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

On peut donc se servir des formules connues, par lesquelles les coefficients d'une équation s'expriment en fonctions des sommes de puissances semblables des racines, pour en déduire immédiatement les expressions des quantités

$$\frac{R_{n+1}}{R_n}, \quad \frac{R_{n+2}}{R_n}, \ldots$$

en fonction des sommes de puissances semblables des quantités a, b,

c, ... Donc les expressions R_1, R_2,..., R_{n-1} étant nulles, et la valeur de R_n se trouvant déterminée par l'équation (VIII), le problème proposé est résolu.

§ III.

En attribuant des valeurs spéciales aux quantités a, b, c,..., les deux théorèmes que je viens d'énoncer fournissent des formules pour les nombres de Bernoulli. Par exemple, en supposant que a, b, c,..., soient les diverses racines de l'équation $x^{2m} = 1$, on sait que les sommes $a^{2\mu} + b^{2\mu} + c^{2\mu} + \ldots$ s'annulent, μ étant $< m$, et que la somme $a^{2m} + b^{2m} + c^{2m} + \ldots$ est égale à $2m$. Par suite, les quantités P_2, P_4,..., P_{2m-2}, ainsi que les quantités R_{2m+2}, R_{2m+4},... R_{4m-2} se réduiront à zéro. Puis en observant que le produit $a.b.c\ldots$, c'est-à-dire le produit de toutes les racines de l'équation $x^{2m} = 1$, est égal à -1, la formule (VIII) donne

$$R_{2m} = -2^{2m}.1.2.3\ldots 2m.$$

Donc, en vertu des deux théorèmes énoncés ci-dessus, les quantités P_{2m} et R_{n+2m} se trouveront déterminées comme il suit :

$$(-1)^m.P_{2m} = -2^{4m}.(2^{2m}-1).B_m,$$

$$(1.2.3\ldots 2m)^2.R_{4m} = (-1)^{m+1}.2^{2m}.1.2.3\ldots 4m.R_{2m}.B_m$$

D'où l'on déduit pour les nombres de Bernoulli les formules curieuses que voici :

$$B_m = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{4m}(2^{2m}-1)}.\sum(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^{2m},$$

$$B_m = \frac{(-1)^m}{2^{4m}.(2m+1)(2m+2)\ldots 4m}.\sum[\pm(\pm a \pm b \pm c \ldots)^{4m}],$$

les lettres a, b, c,..., désignant toutes les diverses racines de l'équation $x^{2m} = 1$.

SUR UNE FORMULE DE GAUSS;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Si l'on désigne par n un nombre premier impair, par a et b respectivement les résidus et les non résidus (pris positivement) de n, et que l'on fasse

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{n},$$

on aura l'équation

$$\text{(I)} \qquad \Sigma\omega^a - \Sigma\omega^b = \pm\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n},$$

que l'on déduit aisément de la théorie des équations binômes. Des méthodes dont l'usage est très-fréquent dans cette théorie suffisent même pour fixer le signe du radical, ce que je vais exposer en peu de mots.

On a par les considérations les plus simples

$$\text{(II)} \qquad \Pi\left[\omega^{2k-1} - \omega^{n-(2k-1)}\right] = +\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n},$$

où le signe Π s'étend à toutes les valeurs de $k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Donc, pour faire disparaître l'ambiguïté de l'équation (I), il faut décider si, dans l'égalité

$$\text{(III)} \qquad \Sigma\omega^a - \Sigma\omega^b = \varepsilon.\Pi\left(\omega^{2k-1} - \omega^{n-2k+1}\right),$$

la lettre ε a la valeur $+1$ ou -1.

Désignons par $F(x)$ la fonction entière de x à coefficients entiers que voici :

$$\Sigma x^a - \Sigma x^b - \varepsilon.\Pi\left(x^{2k-1} - x^{n-2k+1}\right).$$

Cela posé, il résulte de l'équation (III) que la fonction $F(x)$ s'annule

pour $x = \omega$; donc elle contiendra le facteur $(x - \omega)$. Or, ce facteur étant en même temps un des facteurs linéaires de la fonction irréductible $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, il faut que le polynôme $F(x)$ soit divisible par cette fonction même. Observons enfin que la fonction $F(x)$ s'annule pour $x = 1$, c'est-à-dire qu'elle doit contenir le facteur linéaire $(x - 1)$, d'où l'on voit que la fonction $F(x)$ doit être divisible par $(x^n - 1)$, et le quotient sera évidemment une fonction entière de x à coefficients entiers. C'est pourquoi l'on peut poser

$$\Sigma x^a - \Sigma x^b - \varepsilon . \Pi (x^{2k-1} - x^{n-2k+1})$$
$$= (x^n - 1)(A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^h),$$

A, B, C,..., H désignant des nombres entiers. En substituant e^z au lieu de x, il vient

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma e^{az} - \Sigma e^{bz} - \varepsilon \Pi [e^{(2k-1)z} - e^{(n-2k+1)z}] \\ = (e^{nz} - 1)(A + Be^z + Ce^{2z} + \ldots + He^{hz}). \end{array} \right.$$

En développant le facteur $[e^{(2k-1)z} - e^{(n-2k+1)z}]$ en série, le premier terme sera $(4k - 2 - n) . z$; par suite, le premier terme dans le développement du produit Π sera

$$z^{\frac{n-1}{2}} . \Pi (4k - 2 - n).$$

Donc en développant toutes les parties de l'équation (IV) en séries suivant les puissances de z, et en égalant les coefficients du terme $z^{\frac{n-1}{2}}$, on aura

$$(V) \quad \frac{\Sigma a^{\frac{n-1}{2}} - \Sigma b^{\frac{n-1}{2}}}{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}} - \varepsilon . \Pi (4k - 2 - n) = \frac{M}{N}.$$

M et N désignant des nombres entiers. Le numérateur M sera évidemment un multiple de n, parce que, dans le développement de $(e^{nz} - 1)$, les numérateurs des coefficients sont tous divisibles par n. Ensuite on

voit aisément que le dénominateur N ne pourra contenir de facteurs premiers que ceux par lesquels le produit $1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}$ soit divisible. Donc, N étant premier à n, l'équation (V) fournit la congruence

$$\Sigma a^{\frac{n-1}{2}} - \Sigma b^{\frac{n-1}{2}} \equiv \varepsilon . 1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}\cdot\Pi(4k-2n) \pmod{n},$$

ou, en observant que l'on a

$$a^{\frac{n-1}{2}} \equiv +1, \quad b^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1,$$

il vient

$$n-1 \equiv \varepsilon . 1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}\cdot\Pi(4k-2-n) \pmod{n},$$

et comme, par le théorème de Wilson, le produit qui est multiplié par ε, se trouve congru à -1 suivant le module n, on a enfin

$$1 \equiv \varepsilon \pmod{n},$$

d'où il résulte que la lettre ε doit être déterminée par l'égalité $\varepsilon \equiv +1$ dans l'équation (III), et qu'il faut rejeter par suite le signe inférieur dans l'équation (I).

J'ajoute encore une remarque : Le problème en question étant résolu par des considérations plus générales dans les deux Mémoires célèbres de Gauss et de M. Dirichlet, j'ai eu en vue seulement de donner une méthode qui puisse s'expliquer facilement dans des leçons sur la théorie des équations binômes. En considérant cette méthode que je viens d'exposer, on voit que j'ai réussi à trouver la valeur exacte de ε en me bornant à déterminer la valeur à laquelle ε est congrue suivant le module n. C'est en ce point que la méthode exposée ci-dessus ressemble à celle que M. Cauchy a donnée dans un Mémoire publié dans le tome V de ce Journal (page 161 et suivantes). Mais les moyens que j'ai employés pour obtenir le résultat

$$\varepsilon \equiv 1 \pmod{n},$$

sont tout à fait différents de ceux dont M. Cauchy s'est servi pour y

parvenir. En effet, le moyen principal et fort ingénieux de cet illustre auteur consiste à remplacer dans l'équation (III) tous les termes ω^h par $\left(\frac{h}{n}\right)$, et à changer alors l'égalité en une congruence suivant le module n. Cela est permis, il est vrai, si préalablement on imagine que le produit du second membre de l'équation est développé suivant les puissances de ω; mais pour le démontrer, il faudrait encore quelques considérations assez simples, dont l'énonciation complete nuirait cependant à la brièveté.

DÉMONSTRATION

D'UN

THÉORÈME DE M. KUMMER;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Dans son Mémoire sur la Théorie des nombres complexes composés de racines ($\lambda^{\text{ièmes}}$) de l'unité et de nombres entiers, M. Kummer a donné le théorème important que voici [*] :

La condition nécessaire et suffisante pour que le premier facteur du nombre des classes H *soit divisible par* λ, *consiste en ce qu'un quelconque des* $\frac{\lambda-3}{2}$ *premiers nombres bernoulliens soit divisible par* λ.

On peut démontrer ce théorème d'une manière très-simple. En effet, si l'on conserve les notations de M. Kummer [**], tout se réduit à examiner si la congruence

$$\psi(\gamma^{2n-1}) = b_0 + b_1\gamma^{2n-1} + \ldots + b_{\frac{\lambda-3}{2}}\cdot\gamma^{\frac{\lambda-3}{2}(2n-1)} \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

est ou n'est pas satisfaite pour une quelconque des valeurs de

$$n = 1, 2, 3, \ldots, p.$$

Donc, puisqu'on a [***]

$$\lambda b_k = \gamma\cdot\gamma_{k-1} - \gamma_k,$$

il s'agit d'examiner la congruence

$$(\mathrm{I}) \qquad \lambda.\psi(\gamma^{2n-1}) = \Sigma(\gamma\gamma_{k-1} - \gamma_k)\gamma^{(2n-1)k} \equiv 0 \pmod{\lambda^2},$$

où le signe de sommation s'étend à toutes les valeurs de

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (\lambda-2).$$

[*] *Voir* ce Journal, tome XVI, page 479.

[**] *Voir* ce Journal, tome XVI, page 475.

[***] *Voir* ce Journal, tome XVI, page 474.

Partons de l'égalité identique

$$\gamma^k - (\gamma^k - \gamma_k) = \gamma_k .$$

En élevant cette égalité à la puissance $2n$ et en observant que le nombre entier $(\gamma^k - \gamma_k)$ est un multiple de λ, on obtient la congruence

$$\gamma^{2nk} - 2n\gamma^{(2n-1)k}(\gamma^k - \gamma_k) \equiv \gamma_k^{2n} \pmod{\lambda^2},$$

ou

$$(1 - 2n)\gamma^{2nk} + 2n.\gamma_k.\gamma^{(2n-1)k} \equiv \gamma_k^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

En remplaçant k par $(k-1)$ et en multipliant par γ^{2n}, il vient

$$(1 - 2n)\gamma^{2nk} + 2n\gamma_{k-1}\gamma^{(2n-1)k+1} \equiv \gamma^{2n}\gamma_{k-1}^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

En retranchant cette congruence de celle qui précède, on obtient

$$2n(\gamma\gamma_{k-1} - \gamma_k)\gamma^{(2n-1)k} \equiv \gamma^{2n}\gamma_{k-1}^{2n} - \gamma_k^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

Donc on aura de même

$$2n.\Sigma(\gamma\gamma_{k-1} - \gamma_k)\gamma^{(2n-1)k} \equiv \gamma^{2n}\Sigma\gamma_{k-1}^{2n} - \Sigma\gamma_k^{2n} \pmod{\lambda^2}.$$

Or, comme les nombres $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\lambda-2}$ et les nombres $1, 2, 3, \ldots, (\lambda-1)$ sont les mêmes à l'ordre près, on a enfin

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} 2n.\Sigma(\gamma\gamma_{k-1} - \gamma_k)\gamma^{(2n-1)k} \\ \equiv (\gamma^{2n} - 1)\left[1^{2n} + 2^{2n} + \ldots + (\lambda-1)^{2n}\right] \pmod{\lambda^2}. \end{cases}$$

Le nombre $2n$ est moindre que λ. On voit donc que la discussion de la congruence (I) se réduit à la question si le second membre de la congruence (II) est divisible par λ^2. Cela n'a pas lieu pour la valeur

$$2n = 2\mu = \lambda - 1.$$

Car, suivant l'hypothèse (faite par M. Kummer) que le nombre $\gamma^\mu + 1$ ne soit pas divisible par λ^2, le nombre $\gamma^{2\mu} - 1$ ne contiendra qu'*une* fois le facteur λ, et, en vertu du théorème de Fermat, la somme

$$1^{\lambda-1} + 2^{\lambda-1} + \ldots + (\lambda-1)^{\lambda-1}$$

sera congrue à -1 suivant le module λ. Ensuite, pour décider si le produit

$$(\gamma^{2n}-1)\left[1^{2n}+2^{2n}+\ldots+(\lambda-1)^{2n}\right]$$

est divisible par λ^2 pour une des valeurs de $n=1, 2, \ldots, (\mu-1)$, observons que, dans ces cas, le nombre $(\gamma^{2n}-1)$ n'est pas divisible par λ, et que l'expression connue de la somme

$$1^{2n}+2^{2n}+\ldots+(x-1)^{2n}$$

en fonction rationnelle entière de x, fournit la congruence

$$1^{2n}+2^{2n}+\ldots+(\lambda-1)^{2n}\equiv \pm B_n.\lambda \pmod{\lambda^2},$$

B_n désignant le nombre bernoullien $n^{ième}$. Donc, pour que la congruence (I) ait lieu pour une quelconque des valeurs de

$$n=1, 2, 3, \ldots, \mu,$$

il faut et il suffit que la congruence

$$B_n\equiv 0 \pmod{\lambda}$$

soit satisfaite pour une quelconque des valeurs de $n=1, 2, \ldots, (\mu-1)$; ce qu'il fallait démontrer.

DÉMONSTRATION

DE

L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = 0$,

OU n DÉSIGNE UN NOMBRE PREMIER;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Si l'expression $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$ était le produit de deux polynômes à coefficients entiers $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on obtiendrait, en faisant $x = 1$, l'équation

$$n = \varphi(1).\psi(1).$$

Il résulte de là que l'un des nombres entiers $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ doit être égal à ± 1 et l'autre à $\pm n$. Supposons que l'on ait $\varphi(1) = \pm 1$. Puis désignons par m_k un nombre entier positif tel que la congruence $k.m_k \equiv 1 \pmod{n}$ soit satisfaite, k étant un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Enfin soit ω une des racines de l'équation

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = 0,$$

qui font évanouir le facteur $\varphi(x)$. Cela posé, on aura l'égalité

$$\varphi(\omega^{k.m_k}) = \varphi(\omega) = 0.$$

D'où l'on voit que l'expression $\varphi(x^{m_k})$ s'annule pour $x = \omega^k$, c'est-à-dire qu'elle contient le facteur $x - \omega^k$. Donc le produit

$$\varphi(x^{m_1}).\varphi(x^{m_2})\ldots\varphi(x^{m_{n-1}}) \tag{I}$$

sera divisible par le produit

$$(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1}),$$

c'est-à-dire par

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1.$$

Le produit est une fonction entière de x à coefficients entiers. Par

suite, en désignant cette fonction par $P(x)$, le quotient qu'on obtient en divisant $P(x)$ par $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$ sera lui-même une fonction entière de x à coefficients entiers. Or, si l'on fait $x = 1$, il résulte de là que le quotient $\frac{P(1)}{n}$ devrait être égal à un nombre entier; ce qui est impossible, car nous avons supposé que l'on a

$$\varphi(1) = \pm 1,$$

et par suite

$$P(1) = \varphi(1)^{n-1} = 1.$$

On voit aisément qu'on peut appliquer le même raisonnement à l'équation qui ne contient que les racines primitives de l'équation $x^n = 1$, si n est une puissance d'un nombre premier.

SUR

LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES DÉFINIES POSITIVES A COEFFICIENTS RÉELS QUELCONQUES. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE SEEBER SUR LES RÉDUITES DES FORMES TERNAIRES;

PAR M. V.-A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans une forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{F},$$

à coefficients réels quelconques, on peut nommer *valeurs principales de* F celles qui résultent de valeurs entières données à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on met la fonction homogène du second degré $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous la forme

$$\mathrm{A}_1\varphi_1^2 + \mathrm{A}_2\varphi_2^2 + \ldots + \mathrm{A}_n\varphi_n^2,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions homogènes du premier degré, la forme quadratique $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera dite définie positive quand tous les nombres $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ seront plus grands que zéro; c'est le seul cas qui sera considéré ici.

Ainsi la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2$$

sera définie positive si l'on a $a > 0$, $ac - b^2 > 0$. On trouve de même $c > 0$.

La forme ternaire

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy,$$

ou bien

$$a\left(x + \frac{c'}{a}y + \frac{b'}{a}z\right)^2 + \frac{ab - c'^2}{a}\left(y + \frac{aa' - b'c'}{ab - c'^2}z\right)^2 + \frac{abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2}{ab - c'^2}z^2,$$

sera définie positive si l'on a

$$a > 0, \quad ab - c'^2 > 0, \quad abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 > 0;$$

plus généralement

$$\begin{aligned} &a > 0, \quad ab - c'^2 > 0, \quad abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 > 0, \\ &b > 0, \quad bc - a'^2 > 0, \\ &c > 0, \quad ca - b'^2 > 0. \end{aligned}$$

Les nombres

$$ac - b^2, \quad abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2,$$

pris en signe contraire, sont précisément les déterminants des formes

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy.$$

Comme

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= x(ax + by) \\ &\quad + y(bx + cy), \\ ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy &= x(ax + c'y + b'z) \\ &\quad + y(c'x + by + a'z) \\ &\quad + z(b'x + a'y + cz), \end{aligned}$$

on voit que ces déterminants de formes sont des déterminants dans le sens ordinaire : seulement Gauss a changé leur signe. Si l'on ne faisait pas ce changement et qu'on représentât par D_1, D_2, D_3,..., D_n les déterminants des formes

$$f(x_1), \quad f(x_1, x_2), \quad f(x_1, x_2, x_3), \ldots, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

on aurait ce résultat connu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_1 X_1^2 + \frac{D_2}{D_1} X_2^2 + \ldots + \frac{D_n}{D_{n-1}} X_n^2,$$

et la condition nécessaire et suffisante pour rendre $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie positive, serait

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \ldots, \quad D_n > 0.$$

Ces inégalités conduisent à d'autres par la transposition des variables.

Il faut remarquer que, dans la formule précédente, si la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

définie positive, ne doit pas dépasser une certaine limite L, et qu'on ne considère que les *valeurs principales*, comme $X_n = x_n$ il en résultera

$$x_n < \sqrt{\frac{D_{n-1} L}{D_n}},$$

et comme on trouve semblablement des limites pour x_{n-1}, $x_{n-2}, \ldots$, x_2, x_1, on aura ce théorème :

Toute forme définie positive $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à coefficients réels a nécessairement un minimum quand on ne considère que les valeurs principales.

Dans son Mémoire sur l'introduction des variables continues dans la Théorie des Nombres (*Journal de Crelle*, tome XLI), et dans une Note sur les formes ternaires (*Journal de Crelle*, tome XL), M. Hermite admet ce théorème sans démonstration, et il en tire par des réductions à l'absurde l'existence des formes réduites. Ces démonstrations sont, ce me semble, peu satisfaisantes. Les valeurs principales n'étant point entières, comme des nombres non entiers décroissants peuvent approcher d'une limite sans l'atteindre, il aurait fallu montrer que ce cas n'arrive point.

D'ailleurs, pour le cas de deux variables ou des formes binaires, la connaissance du minimum permet de trouver immédiatement la réduite ainsi qu'il suit : Si la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

prend son minimum a' en posant

$$x = m, \quad y = n,$$

d'où

$$a' = am^2 + 2bmn + cn^2,$$

on fera

$$mn_0 - m_0 n = 1,$$

puis

$$x = mx' + m_0 y', \quad y = nx' + n_0 y',$$

d'où résultera la forme équivalente

$$a' x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2,$$

où l'on a

$$\begin{aligned} a' &= am^2 + 2bmn + cn^2, \\ b' &= amm_0 + b(mn_0 + m_0 n) + cnn_0, \\ c' &= am_0^2 + 2bm_0 n_0 + cn_0^2; \end{aligned}$$

puisque a' est un minimum, il faut que

$$a' \leqq c'.$$

Si donc on avait

$$a' - 2b' \geqq 0,$$

on aurait aussi

$$c' - 2b' \geqq 0,$$

et la forme (a', b', c') serait réduite. Dans le cas contraire, comme on peut remplacer m_0 et n_0 par $m_0 + mv$, $n_0 + nv$, qui satisfont encore à l'équation

$$mn_0 - m_0 n = 1,$$

et comme b' se change en $b' + a'v = b''$ et c' en $c' + 2b'v + a'v^2 = c''$, on pourra déterminer v de sorte que la forme (a', b'', c'') soit réduite.

Quand le minimum ne sera pas connu, on emploiera l'algorithme de Gauss (*R. A.*, nos 171 et 177) : dans la forme

$$ax^2 + 2bxy + a'y^2,$$

on posera

$$x = 0.x' - y', \quad y = x' + h'y',$$

h' étant entier, et l'on aura la forme équivalente

$$\begin{aligned} &a' x'^2 + 2(a'h' - b)x'y' + (a - 2bh' + a'h'^2)y'^2 \\ &\qquad = a' x'^2 + 2b' x' y' + a'' y'^2, \end{aligned}$$

en posant

$$b + b' = a'h', \quad a'' = a + h'(b' - b).$$

Il y a donc pour toute valeur entière de h' des valeurs correspondantes de b' et a''; dans le cas de la forme binaire définie positive, on pourra

toujours prendre $b' \leqq \frac{a'}{2}$, en supposant $a' \leqq a$, et cela ne suppose nullement que les coefficients a, b, a' soient entiers. Si l'on avait $b < \frac{a'}{2}$, la forme (a, b, a') serait déjà réduite. Dans le cas contraire, comme $b' \leqq \frac{a'}{2}$, on reconnaîtra que $a'' < a$; et si la forme (a', b', a'') n'était pas réduite, ce qui ne pourrait arriver que pour $a'' < a'$, on passerait à une nouvelle forme en posant

$$x' = o.x'' - y'', \quad y = x'' + h'' y'';$$

cette forme serait (a'', b'', a'''), en supposant

$$b' + b'' = a'' h'', \quad a''' = a' + h''(b'' - b').$$

Continuant d'opérer ainsi, on aura une série de formes contiguës équivalentes $(a, b, a')(a', b', a'')(a'', b'', a''')(a''', b''', a^{IV})\ldots$; et comme, d'après les valeurs de x', y', x'', y'', etc., on voit de suite que a, a', a'', a''',..., sont des nombres qui résultent de valeurs entières données à x, y dans la forme

$$f = ax^2 + 2bxy + a'y^2,$$

ou des *valeurs principales* de f, il en résulte que ces valeurs sont en nombre limité, et que a, a', a'', a''', ..., ne peuvent décroître indéfiniment : on tombera donc forcément sur une forme $[a^{(n)}, b^{(n)}, a^{(n+1)}]$ remplissant les conditions suivantes :

$$a^{(n)}, \quad a^{(n+1)} > o, \quad a^{(n)} \leqq a^{(n+1)}, \quad a^{(n)} - 2b^{(n)} \geqq o, \quad a^{(n+1)} - 2b^{(n)} \geqq o.$$

C'est là une forme réduite, et comme dans certains cas les b peuvent prendre deux valeurs, on voit qu'il y a quelquefois deux formes réduites. Ainsi l'équation

$$b + b' = a'h',$$

pour $b = ak + \frac{a'}{2}$, donnera à volonté

$$b' = \frac{a'}{2} \quad \text{ou} \quad b' = -\frac{a'}{2}.$$

Pour passer à la réduction des formes ternaires positives

$$\varphi = f(x_1, x_2, x_3),$$

on opérera ainsi : Si

$$x_1 = \alpha y_1 + \alpha' y_2, \quad x_2 = \beta y_1 + \beta' y_2,$$

sous la condition

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1,$$

réduisent la forme $f(x_1, x_2)$, on posera

$$x_1 = \alpha y_1 + \alpha' y_2 + 0.\, y_3, \quad x_2 = \beta y_1 + \beta' y^2 + 0.\, y_3,$$
$$x_3 = 0.\, y_1 + 0.\, y_2 + y_3,$$

et la forme $f(y_1, y_2, y_3)$ sera équivalente à $f(x_1, x_2, x_3)$ d'après les théorèmes connus. Dans cette forme, $f(y_1, y_2)$ sera réduite. Si $f(y_1, y_3)$ et $f(y_2, y_3)$ ne le sont pas, on continuera de la même manière en réduisant $f(y_1, y_3)$, ce qui donnera une nouvelle forme $f(z_1, z_2, z_3)$ qu'on traitera de même ; mais comme ces calculs opèrent la diminution graduelle des coefficients des carrés, comme ces coefficients ne sont autres que des valeurs principales de $\varphi = f(x_1, x_2, x_3)$ et par conséquent en nombre limité, il est nécessaire qu'on obtienne finalement une forme équivalente $f(u_1, u_2, u_3)$, où $f(u_1, u_2)$, $f(u_1, u_3)$, $f(u_2, u_3)$ seront toutes réduites. C'est là une forme réduite. Mais, comme on l'a vu plus haut, une même forme peut conduire à plusieurs réduites.

On passera de la forme ternaire à la forme quaternaire, et ainsi de suite, et on aura ce théorème général :

Toute forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *définie positive à coefficients réels quelconques conduit à une forme équivalente* $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *où chacune des formes binaires* $f(u_1, u_2), f(u_1, u_3), \ldots, f(u_i, u_k), \ldots,$ *est une forme réduite.*

Quoique ce théorème ne suffise pas pour la classification des formes définies positives, il n'est pas sans utilité théorique, et c'est peut-être à tort qu'il a été dit, dans une Note sur les formes ternaires, que l'algorithme de réduction n'est pas très-important au point de vue de la théorie.

Comme application, je vais donner la démonstration du théorème de Seeber sur les réduites des formes ternaires définies positives. Voici en quoi ce théorème consiste

Dans toute réduite

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$$

d'une forme ternaire définie positive, si l'on pose

$$D = abc + 2a'b'c' - (aa'^2 + bb'^2 + cc'^2),$$

on aura toujours

$$2D \geqq abc.$$

D'après le théorème précédent, en considérant les valeurs absolues des coefficients a', b', c', on doit avoir

$$\left.\begin{matrix} b-2a', & c-2a', \\ c-2b', & a-2b', \\ a-2c', & b-2c', \end{matrix}\right\} \text{ positifs ou nuls, } \left\{\begin{matrix} bc-4a'^2, \\ ca-4b'^2, \\ ab-4c'^2, \\ abc-8a'b'c', \end{matrix}\right\} \text{ toujours positifs ou nuls, jamais négatifs.}$$

Si l'on met l'équation

$$D = abc + \ldots$$

sous la forme

$$4D = a(bc-4a'^2) + b(ca-4b'^2) + c(ab-4c'^2) + abc + 8a'b'c',$$

on voit de suite :

1°. Que pour $a' = b' = c' = 0$, on a $D = abc$,

2°. Que pour $b' = c' = 0$, on a $4D - 3abc \geqq 0$,

3°. Que pour $c' = 0$, on a $4D - 2abc \geqq 0$.

Ainsi, dans ces trois cas, le théorème de Seeber est vérifié.

Voici, d'après Gauss, la démonstration des autres cas (*Journal de Crelle*, tome XX, page 312). Seeber a trouvé son théorème par induction ; la démonstration de Gauss est encore la plus simple.

Il ne me semble point, comme il a été dit, que cette démonstration repose sur des principes singulièrement cachés. Comme D et $2D - abc$ sont des fonctions invariables par la permutation tournante des lettres a, b, c ; a', b', c' ; comme, de plus, les inégalités conditionnelles sont

aussi invariables par la permutation tournante, et conduisent à des fonctions invariables par cette permutation, et essentiellement positives, il était naturel d'examiner si $2D - abc$ ne serait pas la somme de plusieurs de ces fonctions : or c'est précisément ce que fait Gauss.

Il faut considérer deux cas :

1°. a', b', c' positifs et $+a', -b', -c', -a', +b', -c', -a', -b', +c'$, ou $a'b'c'$ positif; tous ces cas rentrent l'un dans l'autre, car le changement de signe de deux des variables x, y, z ne détruit pas l'équivalence.

2°. Les cas $-a', -b', -c', \quad -a'+b', +c', \quad +a', -b', +c', +a', +b', -c'$, ou celui de $a'b'c'$ négatif quand les signes ne sont pas mis en évidence, rentrent aussi l'un dans l'autre.

Je supposerai a', b', c' positifs dans le premier cas et négatifs dans le second, ou plutôt j'écrirai alors $-a', -b', -c'$.

Dans le premier cas,

$$2D - abc = abc + 4a'b'c' - 2(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2)$$

ne sera jamais négatif, car

$$\begin{aligned} A = {} & aa'(b - 2a') + bb'(c - 2b') + cc'(a - 2c') \\ & + a'(a - 2b')(b - 2c') + b'(b - 2c')(c - 2a') + c'(c - 2a')(a - 2b') \\ & + (a - 2b')(b - 2c')(c - 2a') \end{aligned}$$

est essentiellement positif ou nul, et donne, réduction faite,

$$A = abc + 4a'b'c' - 2(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2) = 2D - abc;$$

ainsi $2D - abc$ n'est jamais négatif; $2D \geqq abc$.

Dans le second cas, on met une nouvelle condition pour les réduites; prenant $a < b < c$, on suppose $a + b - 2(a' + b' + c')$ nul ou positif : cela est permis, car si l'on avait au contraire $a + b + \delta = 2a' + 2b' + 2c'$, δ étant positif, on poserait

$$\begin{aligned} x &= -x' + 0 \cdot y' + z', \\ y &= 0 \cdot x - y' + z', \\ z &= 0 \cdot x' + 0 \cdot y' + z', \end{aligned}$$

substitution de déterminant $+1$ qui changerait la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 2a'yz - 2b'xz - 2c'xy$$

dans la forme équivalente

$$a x'^2 + b y'^2 + [a + b + c - 2(a' + b' + c')] z'^2 - 2(b - a' - c') y' z' - 2(a - b' - c') x' z' - 2 c' x' y'.$$

Or on reconnaît que cette forme est encore réduite, et que, si on la représentait par

$$a_1 x'^2 + b_1 y'^2 + c_1 z'^2 - 2 a'_1 y' z' - 2 b'_1 x' z' - 2 c'_1 x' y',$$

elle remplirait (outre les conditions ordinaires $a_1 - 2 b'_1 \geq 0$, etc.) la condition nouvelle demandée, que la somme des deux plus petits coefficients des carrés surpasse ou au moins égale la somme $2(a'_1 + b'_1 + c'_1)$ des coefficients des rectangles.

Ceci posé, on a

$$D = abc - 2 a' b' c' - (a a'^2 + b b'^2 + c c'^2),$$

d'où

$$2D - abc = abc - 4 a' b' c' - 2(a a'^2 + b b'^2 + c c'^2),$$

quantité qui n'est jamais négative; car si l'on pose

$$\begin{aligned} B = {} & (a - 2 c')(b - 2 a')(c - 2 b') \\ & + (a - 2 b')(b - 2 c')(c - 2 a') \\ & + 2 a a' [b + c - 2(a' + b' + c')] + 2 b b' [c + a - 2(b' + c' + a')] \\ & + 2 c c' [a + b - 2(c' + a' + b')], \end{aligned}$$

cette quantité, qui n'est jamais négative, sera, réduction faite,

$$B = 2 abc - 16 a' b' c' - 4(a a'^2 + b b'^2 + c c'^2),$$

et ajoutée à la quantité positive employée déjà,

$$A = abc + 4 a' b' c' - 2(a a'^2 + b b'^2 + c c'^2),$$

elle donnera

$$A + B = 3 abc - 12 a' b' c' - 6(a a'^2 + b b'^2 + c c'^2) = 6D - 3 abc.$$

Ainsi $2D - abc$ n'est jamais négatif.

On parvient au même résultat ainsi qu'il suit :

Soit

$$\begin{aligned} C = {} & c(a - 2 c')(b - 2 a') \\ & + c(a - 2 b')(b - 2 c') \\ & + 2 a a'(c - 2 a') + 2 b b'(c - 2 b') + 2 c c' [a + b - 2(a' + b' + c')]. \end{aligned}$$

Cette quantité, qui n'est jamais négative, est, réduction faite,

$$C = 2abc - 4(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2);$$

d'ailleurs

$$B = 2abc - 16a'b'c' - 4(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2);$$

de là,

$$B + C = 4abc - 16a'b'c' - 8(aa'^2 + bb'^2 + cc'^2) = 8D - 4abc.$$

Cette démonstration ne diffère de celle de Gauss que par la notation et quelques développements; d'ailleurs elle emploie les trois mêmes identités.

La Note de Gauss sur l'ouvrage de M. Seeber finit par l'exposé de quelques considérations géométriques relatives aux formes binaires et ternaires; elles ont été développées par M. Dirichlet (*Journal de Crelle*, tome XL). On trouve à la fin du Mémoire de M. Dirichlet [*] une démonstration géométrique du théorème de Seeber; M. Hermite en a aussi donné une dans le même Journal. Les deux démonstrations emploient une même inégalité, que les deux auteurs ont obtenue par des moyens différents. Il convient de dire ici qu'à la fin de sa Note Gauss donne l'énoncé géométrique suivant du théorème de Seeber :

Dans tout parallélipipède, où les diagonales, tant celles des faces que celles du parallélipipède, ne sont pas inférieures aux arêtes, le volume du parallélipipède multiplié par $\sqrt{2}$ *n'est jamais inférieur au volume du parallélipipède rectangle formé avec trois arêtes issues d'un même sommet.*

---

[*] Cet excellent Mémoire est écrit en langue allemande, et il serait bien à désirer qu'on nous en donnât une traduction française. (J. Liouville.)

MODE

DE CONSTRUCTION ET DE DESCRIPTION

DE LA

COURBE DU QUATRIÈME ORDRE DÉTERMINÉE PAR QUATORZE POINTS;

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,

Lieutenant de Vaisseau.

(Extrait d'un Mémoire sur la génération des courbes géométriques, présenté par l'auteur à l'Académie des Sciences.)

I.

Notations. Un *faisceau* de coniques est une série de coniques circonscrites au même quadrilatère. Soit *cdef* ce quadrilatère; les coniques (*cdef* 1), (*cdef* 2), (*cdef* 3), (*cdef* 4), etc., forment un faisceau que je représenterai brièvement par la notation suivante :

$$(cdef)\,[1, 2, 3, 4, \ldots].$$

J'appelle *base* du faisceau le système des quatre points communs à toutes les coniques de ce faisceau; le système des autres points 1, 2, 3, 4,..., dont chacun détermine une conique, est la *partie variable* du faisceau.

Il peut entrer des points inconnus dans la base d'un faisceau. Ainsi

$$(abxy)\,[1, 2, 3, 4, \ldots,]$$

représente un faisceau de coniques qui passent toutes par deux points connus a et b, et par deux autres points inconnus x et y.

Deux faisceaux *anharmoniques* sont deux faisceaux dont les courbes composantes se correspondent anharmoniquement dans le sens que M. Chasles a donné à cette expression. S'il s'agit de deux faisceaux de droites, on peut dire aussi que les deux faisceaux sont *homogra-*

phiques. Mais, sauf ce cas particulier, il ne faut point confondre la correspondance *anharmonique* avec l'*homographie* qui ne peut avoir lieu qu'entre des courbes du même ordre, et qui exige d'autres relations entre ces courbes.

Deux faisceaux anharmoniques donnent lieu, par les intersections mutuelles de leurs courbes correspondantes, à une courbe dont le degré est égal à la somme des degrés des courbes composantes. Ce théorème général est démontré dans le Mémoire d'où cette Note est extraite. Je n'ai eu du reste qu'à suivre la démonstration que M. Chasles applique à deux faisceaux homographiques de coniques, dans le tome XXXVII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, pages 273 et suivantes

La courbe *résultante* des deux faisceaux passe par tous les points qui composent les bases respectives des deux faisceaux. Et si un point de l'une des deux bases est aussi un point de la seconde base, ce point devient un point double dans la courbe résultante.

Je ne reproduirai pas ici les démonstrations de ces divers corollaires.

II.

Quand il y a des points inconnus dans la base d'un des deux faisceaux, on peut profiter de leur indétermination pour rendre ce faisceau anharmonique à l'autre. Comme ce sont, dans le Mémoire, les rapports anharmoniques de quatre des courbes données qui servent à déterminer ces points inconnus, on conclut facilement de la théorie de l'homographie, que le nombre des conditions fournies par les données du problème doit excéder de trois le double du nombre des points inconnus. On trouvera aussi dans le Mémoire la démonstration générale de ce théorème, d'où il résulte que, si l'on se propose de trouver deux points x et y tels que les deux faisceaux

$$(cdef)\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7]$$

et

$$(abxy)\,[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7]$$

soient anharmoniques, la question est entièrement déterminée.

C'est précisément par cette question que je vais commencer la présente Note, car elle me sera utile pour la solution du problème difficile qui en fait le sujet principal.

III.

On commencera par déterminer trois points P, P′, P″ tels que les trois faisceaux de cinq droites

$$P\,[1, 2, 3, 4, 5], \qquad P'\,[1, 2, 3, 4, 6], \qquad P''\,[1, 2, 3, 4, 7],$$

soient anharmoniques respectivement aux trois faisceaux de cinq coniques

$$(cdef)\,[1, 2, 3, 4, 5], \quad (cdef)\,[1, 2, 3, 4, 6], \quad (cdef)\,[1, 2, 3, 4, 7],$$

problème facile qui n'exige, comme on sait, que l'emploi de la ligne droite et du cercle.

Il est d'abord évident que les trois points P, P′, P″ se trouvent sur la conique qui s'appuie sur les quatre points donnés 1, 2, 3, 4, et qui est *capable* du rapport anharmonique des quatre coniques

$$(cdef)\,[1, 2, 3, 4].$$

J'appelle Σ cette conique, qui est déterminée.

Cela posé, les dix points 1, 2, 3, 4, 5, P, a, b, x, y sont situés sur une même courbe inconnue du troisième ordre W. Cette courbe coupe une droite quelconque PO issue du point P, en deux autres points ε, φ, par lesquels passe nécessairement aussi la conique inconnue S qui, dans le faisceau des coniques génératrices de la courbe W, correspond anharmoniquement au rayon générateur PO.

Que l'on fasse passer par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, P, a, b, une série de courbes du troisième ordre U, U′, U″, . . . , dont la courbe inconnue W fait naturellement partie. Ces courbes intercepteront sur le rayon PO des segments en involution lm, $l'm'$, $l''m''$, ... Deux seulement de ces segments feront connaître les points doubles λ, μ de l'involution, et ces deux segments eux-mêmes se construiront avec la ligne droite et le cercle sans qu'on ait besoin de construire les courbes U et U′ (*voir* dans les *Comptes rendus*, tome XLI, le § XI d'une Note

de M. Chasles sur les courbes du troisième ordre). Cela posé, le segment $\lambda\mu$ est divisé harmoniquement par le segment $\varepsilon\varphi$ qui fait partie de la série des segments lm, $l'm'$,.... Donc la conique S divise harmoniquement le segment $\lambda\mu$.

Soit O le point où le rayon arbitraire PO rencontre la conique Σ; qu'on joigne P′O et P″O. On a évidemment

$$\text{rapp. anh. P}[1, 2, 3, O] = \text{rapp. anh. P}'[1, 2, 3, O] = \text{rapp. anh. P}''[1, 2, 3, O],$$

parce que tous ces points sont sur une même conique Σ. Donc ces trois rapports anharmoniques sont égaux à celui des quatre coniques $(ab\,xy\,1)$, $(ab\,xy\,2)$, $(ab\,xy\,3)$, et S qui n'est autre que $(ab\,xy\,\varepsilon\varphi)$. Par conséquent, si l'on considère les deux courbes du troisième ordre W′ ou $(1\,2\,3\,4\,6\,\text{P}'\,ab\,xy)$ et $(1\,2\,3\,4\,7\,\text{P}''\,ab\,xy)$ ou W″, la conique S, regardée comme une conique génératrice de ces courbes, correspond au rayon générateur P′O pour l'une, et au rayon générateur P″O pour l'autre, de même qu'elle correspondait au rayon générateur PO quand il s'agissait de la courbe W.

Il résulte de là, par des raisonnements identiques à ceux qui précèdent, que si l'on détermine les deux points doubles λ', μ' de l'involution marquée sur P′O par une série de courbes du troisième ordre circonscrites à l'octogone $1\,2\,3\,4\,5\,6\,\text{P}'\,ab$, la conique S divisera aussi harmoniquement le segment $\lambda'\,\mu'$.

Et enfin si l'on détermine les deux points doubles λ'', μ'' de l'involution marquée sur P″O par une série de courbes du troisième ordre circonscrites à l'octogone $1\,2\,3\,4\,7\,\text{P}''\,ab$, la conique S divisera encore harmoniquement le segment $\lambda''\,\mu''$.

Ainsi cette conique S est déterminée, puisqu'elle passe par deux points connus a, b, et qu'elle doit couper harmoniquement trois segments actuellement connus $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, $\lambda''\,\mu''$ (*voir*, au sujet de ce problème, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV, p. 437).

Si l'on prend sur Σ un autre point O′, et qu'on mène les trois rayons PO′, P′O′, P″O′, on donnera lieu à trois nouvelles séries de segments en involution, et par suite à trois segments de points doubles $\nu\rho$, $\nu'\,\rho'$, $\nu''\,\rho''$, qui devront être divisés harmoniquement à la fois par la conique S′ qui, regardée successivement comme conique génératrice des trois courbes du troisième ordre W, W′, W″, correspond anharmoniquement aux rayons générateurs PO′, P′O′, P″O′ respectivement.

Cette conique S′ passe comme S par les quatre points a, b, x, y; ces deux courbes ont deux points communs a, b; on pourra donc déterminer les deux autres x, y sans construire les coniques et en se servant simplement de la règle et du compas. Ces deux points sont précisément les points cherchés, et l'on voit qu'ils peuvent être imaginaires, ce qui n'empêchera pas le faisceau de coniques

$$(abxy)[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

d'exister et d'être homographique au faisceau donné. Enfin on voit que la question proposée n'a qu'une seule solution.

IV.

Le problème que je viens de résoudre donne la clef de plusieurs questions intéressantes. Je ne citerai ici que les deux suivantes :

1°. *Construire la courbe du quatrième ordre déterminée par un point double et onze autres points.*

On voit effectivement que si a est le point double, et si b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sont les onze autres points, il suffit de trouver deux points x et y qui rendent anharmoniques les deux faisceaux

$$(abcd)[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$
$$(aexy)[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].$$

La courbe résultante sera du quatrième ordre, et elle aura un point double en a, parce que le point est commun aux bases des deux faisceaux de coniques génératrices.

La détermination des points x, y rentre dans la question qui a déjà été résolue.

2°. *Construire l'une des courbes du quatrième ordre qui passent en nombre infini par treize points donnés.*

Il suffit encore d'*anharmoniser* les deux faisceaux de coniques

$$(abcd)[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$
$$(efxy)[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$

en déterminant convenablement les points x et y; ce qu'on sait faire.

En écrivant

$$(abcd)\quad [e, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$
$$(1fx'y')\,[e, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$

on obtiendrait une autre courbe du quatrième ordre passant aussi par les treize points donnés, et distincte de la première, comme il est bien facile de le démontrer.

V.

Au lieu de construire une de ces courbes du quatrième ordre, on peut demander simplement de déterminer les deux points où elle rencontre une droite L qui passe déjà par deux points connus de cette courbe. Ce problème facile n'exige que l'emploi de la ligne droite et du cercle. En effet, les coniques du premier faisceau générateur déterminent sur la droite L une série de segments en involution, et les coniques du second faisceau générateur en déterminent une seconde. Les segments se correspondent anharmoniquement comme les coniques elles-mêmes. Donc il existe sur L quatre points qui appartiennent en même temps à deux segments correspondants, c'est-à-dire qui sont sur la courbe du quatrième ordre (Chasles, *Comptes rendus*, t. XLI, p. 679). Mais ici deux de ces points sont connus, ce qui abaisse au second degré la construction des deux autres points.

VI.

J'aborde maintenant la question suivante :

Décrire la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points.

Cette question est susceptible de plusieurs solutions; mais je dois me borner ici à en faire connaître une. On en trouvera deux autres dans le Mémoire.

Soient a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les quatorze points donnés, et W la courbe du quatrième ordre qu'ils déterminent.

Le problème revient évidemment à celui-ci :

Trouver trois points x, y, z tels, qu'ils rendent anharmoniques les

deux faisceaux

$$(abcd)\ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9],$$
$$(exyz)\ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].$$

Je regarde le système des deux droites ab et cd comme étant une conique du premier faisceau, et je vais déterminer la conique S qui lui correspond dans le second. Je déterminerai ensuite la conique S′ qui correspond au système des deux droites ac, bd, considéré comme étant une conique du premier faisceau.

Les deux coniques S, S′ passent par les quatre points e, x, y, z, et le point e est connu. Leurs trois autres points d'intersection résoudront la question.

Pour construire S, je suppose qu'on circonscrive aux treize points a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 une série de courbes du quatrième ordre z, z', z'', etc., dont W fait nécessairement partie. Ces courbes couperont les deux droites ab et cd, chacune en deux points, autres que les points a et b ou c et d, et tous ces couples de points sont en involution sur l'une et sur l'autre droite. Soient $\varepsilon\varphi$ et $\gamma\delta$ les deux segments inconnus interceptés sur les deux droites par la courbe W. Ces segments font partie des deux involutions respectivement, et par conséquent ils divisent harmoniquement, l'un le segment $\lambda\mu$ des points doubles de la première involution, l'autre le segment $\nu\rho$ des points doubles de la seconde.

Il faut donc trouver ces points doubles, ce qui exige deux segments d'essai sur chacune des deux droites. J'ai dit plus haut (V) comment on déterminera ces segments, sans avoir besoin de construire les courbes auxiliaires Z, Z′, qui n'apparaissent que dans la démonstration.

Actuellement, si l'on fait passer par treize des points donnés différemment choisis, tels que a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, une autre série de courbes du quatrième ordre Y, Y′, Y″, etc., série dont fait encore partie la courbe cherchée W, on déterminera sur les droites ab et cd deux nouvelles séries de segments en involution, dont les points doubles respectifs λ', μ' et ν', ρ' seront, comme ci-dessus, divisés harmoniquement par le segment $\varepsilon\varphi$ sur ab, et par le segment $\gamma\delta$ sur cd

Donc ces segments $\varepsilon\varphi$ et $\delta\gamma$ sont déterminés, puisque chacun d'eux doit diviser harmoniquement deux segments donnés sur une droite; on les construira comme il est dit au n° 210 de la *Géométrie supérieure*.

La conique S dont on connaît actuellement cinq points, savoir e, ε, φ, γ, δ est donc déterminée.

On déterminera par des procédés identiques la conique S′ qui correspond au système des deux droites ac, bd.

Les coniques S et S′ étant connues, le problème proposé est résolu, et l'on voit qu'ainsi posé il n'a qu'une seule solution; je veux dire qu'il n'existe qu'un seul système de trois points x, y, z qui y satisfasse.

VII.

On conclura sans difficulté de la solution qui précède celle de cette autre question :

Connaissant quatre des points d'intersection d'une conique et d'une courbe du quatrième ordre, trouver les quatre autres.

On commencera par déterminer la base du second faisceau de coniques génératrices, $(abcd)$ étant celle du premier (a, b, c, d sont les quatre points communs aux deux courbes), et pour cela on prendra arbitrairement un des quatre points de cette base inconnue. Ensuite on cherchera quelle est la conique S′ du second faisceau qui correspond à la conique S, qui est donnée et qui fait naturellement partie du premier faisceau. Les quatre points d'intersection des coniques S et S′ sont les quatre points demandés.

VIII.

On déduit des mêmes considérations la solution du problème suivant :

Connaissant sept des points d'intersection d'une courbe du troisième ordre avec une courbe du quatrième ordre, déterminer la conique sur laquelle se trouvent les cinq autres.

Soient a, b, c, d, e, f, g les sept points d'intersection connus; α, β, γ, δ, ε les cinq autres qu'il s'agit de trouver. Je prends quatre des points donnés, a, b, c, d par exemple, comme base des coniques gé-

nératrices de la courbe du troisième ordre U et de la courbe du quatrième ordre W; je détermine 1° le sommet P du faisceau des droites génératrices de la courbe U (CHASLES, *Construction de la courbe du troisième ordre*); et 2° la base $(ixyz)$ du deuxième faisceau des coniques génératrices de la courbe du quatrième ordre, d'après la méthode que j'ai exposée précédemment. i est un point quelconque de la courbe du quatrième ordre qui n'est pas tracée, non plus que la courbe U, mais dont on connaît quatorze points.

Les cinq points α, β, γ, δ, ε étant sur la courbe du quatrième ordre, les deux faisceaux de coniques

$$(abcd)\,[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon],$$
$$(ixyz)\,[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon],$$

sont anharmoniques. Mais ils sont aussi sur la courbe du troisième ordre U. Donc les deux faisceaux

$$(abcd)\,[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon],$$
$$\mathrm{P}\,[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon],$$

sont anharmoniques; et il en résulte qu'il en est de même des deux faisceaux

$$(ixyz)\,[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon],$$
$$\mathrm{P}\,[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon].$$

Donc les cinq points cherchés se trouvent aussi sur une seconde courbe du troisième ordre U′, qui résultent des intersections mutuelles des courbes et des droites correspondantes de ces deux derniers faisceaux. On a toutes les données nécessaires pour construire cette courbe, ou du moins pour en trouver neuf points. Car on connaît trois rayons Pe, Pf, Pg, ainsi que les trois coniques correspondantes $(ixyze)$, $(ixyzf)$, $(ixyzg)$. On en trouvera donc sans peine cinq autres points.

Cela posé, les deux courbes U et U′ ont quatre points communs, savoir e, f, g, P. Leurs cinq autres points d'intersection sont sur une conique qu'on sait déterminer (CHASLES, *Comptes rendus*, tome XLI, 1855); ce sont précisément les points cherchés. Ainsi le problème est résolu.

La question précédente peut offrir de l'intérêt en analyse, car elle résout géométriquement une question d'algèbre, savoir : *Étant données deux équations à deux variables, l'une du troisième et l'autre du quatrième degré, dont on connaît sept systèmes de racines communes, on demande de former une équation du second degré entre les mêmes variables à laquelle satisfassent les cinq autres systèmes de racines communes aux deux équations proposées.*

IX.

Toutes les propositions, questions et constructions qui précèdent sont de celles qui se transformeront d'elles-mêmes par le principe de *dualité*. On pourra donc en conclure les solutions des deux questions suivantes :

1°. *Décrire la courbe de quatrième* classe, *déterminée par une tangente double et onze autres tangentes données.*

2°. *Décrire la courbe de quatrième* classe, *déterminée par quatorze tangentes.*

Je n'entrerai pas dans les détails faciles de cette transformation

SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}};$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

On connaît les travaux des géomètres sur l'intégrale définie binôme

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,$$

à laquelle Legendre a donné le nom d'*intégrale eulérienne de première espèce*. Vient ensuite l'intégrale à trois facteurs

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{(1-at)^r},$$

qui est au fond le sujet du beau travail de Gauss intitulé *Disquisitiones circa seriem generalem*, et dont M. Kummer et d'autres géomètres se sont aussi occupés. Au delà se présenteraient les intégrales à quatre ou à plus de quatre facteurs que l'on a jusqu'ici peu étudiées. L'intégrale

$$U=\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}},$$

dont je veux m'occuper ici, et où μ est assujetti à cette seule restriction que $\mu+\frac{1}{2}$ ait une valeur positive ou du moins à partie réelle positive, offre un exemple remarquable pour le cas de quatre facteurs : les deux derniers facteurs y sont affectés d'un même exposant, et dès lors ne figurent que par leur produit

$$a+bt-ct^2.$$

Pour plus de simplicité, je supposerai réels les coefficients a, b, c. Afin d'éviter l'inconvénient des valeurs infinies sous le signe $\int$, j'admettrai en outre que le trinôme $a + bt - ct^2$ ne s'évanouit pour aucune valeur de t comprise entre o et 1, et qu'il reste, par exemple, toujours positif dans ces limites. Pour cela il faut d'abord que les valeurs extrêmes a et $a + b - c$ soient positives, ce qui permettra de poser

$$a = h^2, \quad a + b - c = g^2,$$

et par conséquent

$$a + bt - ct^2 = g^2 t + h^2 (1 - t) + ct (1 - t),$$

les quantités g et h étant positives. On verra plus bas qu'il faut aussi que

$$c + (g + h)^2 > 0.$$

Cela étant, je vais prouver que l'on a

$$U = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{g \cdot \Gamma(\mu + 1) \cdot [c + (g + h)^2]^{\mu + \frac{1}{2}}}.$$

Il est visible, au surplus, qu'en différentiant par rapport à g et h (ou plutôt par rapport à g^2 et h^2), on tirerait de la valeur indiquée de U celle de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu + \alpha + \frac{1}{2}} (1 - t)^{\mu + \beta - \frac{1}{2}} dt}{[g^2 t + h^2 (1 - t) + ct (1 - t)]^{\mu + \alpha + \beta + 1}},$$

α et β désignant des entiers positifs. Mais l'expression si simple de notre intégrale U offre surtout de l'intérêt. Voici comment on l'établit par un calcul facile.

La valeur du produit

$$g \cdot U = g \int_0^1 \frac{t^{\mu + \frac{1}{2}} (1 - t)^{\mu - \frac{1}{2}} dt}{[g^2 t + h^2 (1 - t) + ct (1 - t)]^{\mu + 1}},$$

se transforme en posant $t = \frac{y^2}{1+y^2}$, et devient

$$g.\mathrm{U} = 2g \int_0^\infty \frac{y^{2\mu+2}\,dy}{[(g^2+h^2)(1+y^2)+cy^2]^{\mu+1}};$$

d'où

$$g.\mathrm{U} = 2g \int_0^\infty \frac{dy}{\left[\left(gy-\frac{h}{y}\right)^2 + c + (g+h)^2\right]^{\mu+1}}.$$

On voit nettement ici la nécessité de la condition dont nous avons parlé :

$$c + (g+h)^2 > 0.$$

Si elle n'avait pas lieu, on trouverait des valeurs infinies sous le signe intégral.

En changeant y en $\frac{h}{gy}$, on obtient une autre expression du produit g.U. savoir

$$g.\mathrm{U} = 2h \int_0^\infty \frac{dy}{y^2\left[\left(gy-\frac{h}{y}\right)^2 + c + (g+h)^2\right]^{\mu+1}}.$$

On peut aussi prendre la demi-somme des deux valeurs trouvées. Donc

$$g.\mathrm{U} = \int_0^\infty \frac{\left(g+\frac{h}{y^2}\right)dy}{\left[\left(gy-\frac{h}{y}\right)^2 + c + (g+h)^2\right]^{\mu+1}}.$$

Or, si l'on pose

$$gy - \frac{h}{y} = x,$$

il est clair que x variera de $-\infty$ à $+\infty$ quand y varie de o à ∞. D'un autre côté,

$$\left(g+\frac{h}{y^2}\right)dy = dx.$$

Par suite,

$$g.U = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[x^2 + c + (g+h)^2]^{\mu+1}},$$

ou, si l'on veut,

$$g.U = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{[x^2 + c + (g+h)^2]^{\mu+1}}.$$

L'intégrale placée au second membre est bien connue. On la ramène d'ailleurs aux intégrales binômes, et par conséquent aux fonctions *gamma*, en faisant

$$x^2 = \frac{t[c + (g+h)^2]}{1-t}.$$

On en conclut sans difficulté

$$g.U = \frac{1}{[c + (g+h)^2]^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)}.$$

Divisez par g et remplacez $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par $\sqrt{\pi}$: cela vous donnera la valeur de U que j'ai annoncée.

La même analyse peut servir à ramener à la série de Gauss certaines intégrales à six facteurs ; elle conduit en outre, pour le cas d'un nombre quelconque de facteurs, à des réductions remarquables : enfin on en tire une formule générale, contenant une fonction arbitraire. Cela pourra faire le sujet d'un autre article ; mais il m'a semblé que l'intégrale U méritait d'abord quelques lignes à part.

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT DE LA TERRE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ;

PAR LE PÈRE M. JULLIEN, S. J.

La théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité a été considérée jusqu'ici comme un des points les plus difficiles de la Mécanique céleste. Dernièrement M. Poinsot a montré comment la méthode des couples conduit par une voie simple et lumineuse à des formules qui représentent le mouvement de l'axe terrestre d'une manière approchée, quant à ses traits les plus apparents; mais l'analyse difficile de Laplace est restée la voie la plus simple pour arriver aux formules qui représentent le phénomène dans tous les détails que l'observation peut saisir [*].

Le problème de la détermination du mouvement de la Terre autour de son centre prenant de jour en jour plus d'intérêt, à mesure que l'astronomie stellaire se développe, il m'a paru utile de chercher une solution plus simple que celles qui ont été données jusqu'ici. La méthode des couples m'a fourni cette solution : sans avoir recours à d'autre théorème que celui de la composition des couples suivant la loi du parallélogramme, j'arrive, par des calculs très simples, non-seulement aux formules de Laplace, mais aussi aux formules plus com-

[*] Si je n'éprouvais pas de la répugnance à intervenir dans les travaux des autres en les chargeant de notes, j'aurais plus d'une observation à présenter sur ce Mémoire. Qu'il me soit du moins permis de dire que la méthode de Laplace devient très-facile quand on l'expose avec de légers changements, en profitant de quelques remarques de Poisson, ainsi que je l'ai fait dans un des Cours du Collége de France, à l'époque déjà bien ancienne où j'étais le suppléant de M. Biot. J'ai dû m'occuper alors de la plupart des grandes questions de la physique mathématique et de la mécanique céleste, et tout naturellement j'ai traité de la précession des équinoxes. On retrouverait sans peine dans les Thèses des candidats au doctorat ès sciences de nombreuses traces de mon enseignement. (J. LIOUVILLE.)

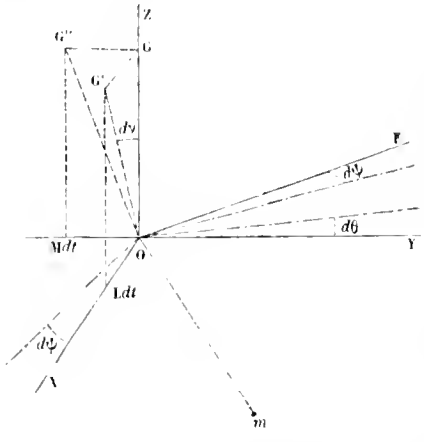
plètes données par Bessel, dont les astronomes se servent actuellement dans les recherches qui exigent la plus grande précision.

I.

Je reprends la question dès le principe.

Dans le calcul du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, on peut sans erreur appréciable considérer les masses du Soleil et de la Lune comme réunies à leurs centres de gravité respectifs. On est donc conduit à calculer les moments de l'attraction exercée sur la Terre par un point matériel fort éloigné autour des axes principaux d'inertie qui se coupent au centre de gravité du corps attiré.

Dans toute la suite des calculs, nous regarderons comme positives les rotations qui s'effectuent de droite à gauche, suivant l'usage des astronomes; nous étendrons cette convention aux moments des forces et aux moments des couples. Nous ne ferons d'abord aucune hypothèse sur la constitution de la Terre.



Soient

OX, OY, OZ trois axes coordonnés dirigés suivant les axes principaux d'inertie de la Terre relatifs au centre de gravité;

x', y', z' les coordonnées d'une molécule de la Terre;

dm' la masse de cette molécule;

x, y, z les coordonnées du point attirant, lequel est très-éloigné de l'origine;

r la distance de ce point au centre de gravité de la Terre;

r' la distance du même point à la molécule dm';

m le produit de la masse du même point par la constante qui mesure l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance;

X, Y, Z les composantes de l'attraction exercée par le point sur la Terre, dirigées suivant les axes OX, OY, OZ;

L, M, N les moments de cette attraction autour des axes OX, OY, OZ.

Nous avons d'abord

$$X = m\int \frac{x-x'}{r'^3}\,dm', \quad Y = m\int \frac{y-y'}{r'^3}\,dm', \quad Z = m\int \frac{z-z'}{r'^3}\,dm',$$

les intégrales s'étendant à toutes les molécules de la Terre. Il s'ensuit

$$L = Zy - Yz = mz\int \frac{y'}{r'^3}\,dm' - my\int \frac{z'}{r'^3}\,dm',$$
$$M = Xz - Zx = mx\int \frac{z'}{r'^3}\,dm' - mz\int \frac{x'}{r'^3}\,dm',$$
$$N = Yx - Xy = my\int \frac{x'}{r'^3}\,dm' - mx\int \frac{y'}{r'^3}\,dm'.$$

Or

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 - \left(2\frac{x}{r}\frac{x'}{r} + 2\frac{y}{r}\frac{y'}{r} + 2\frac{z}{r}\frac{z'}{r} - \frac{x'^2}{r^2} - \frac{y'^2}{r^2} - \frac{z'^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{3}{2}};$$

si nous développons la puissance fractionnaire par la formule du binôme, et que nous négligions dans ce développement les termes qui contiennent les secondes puissances des rapports très-petits $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$ vis-à-vis des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ qui sont comparables à l'unité, il reste

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\frac{xx' + yy' + zz'}{r^2}\right).$$

Substituant cette valeur dans les expressions des moments L, M, N, et nommant A, B, C les moments d'inertie principaux de la Terre autour des axes OX, OY, OZ, il vient

$$L = \frac{3m(C-B)}{r^5}yz, \quad M = \frac{3m(A-C)}{r^5}zx, \quad N = \frac{3m(B-A)}{r^5}xy.$$

II.

Actuellement, ayons égard à ce que l'observation et la théorie nous apprennent sur la constitution de la Terre.

Le centre de gravité de la Terre étant supposé fixe, le mouvement du globe est une rotation autour d'un axe qui paraît absolument fixe dans ce corps, bien qu'il se déplace d'une manière sensible dans l'espace. De plus, la forme de la Terre diffère peu de la forme sphérique; et rien ne porte à croire que les éléments de masse situés à une même

distance du centre aient des densités fort inégales. Nous pouvons donc admettre que les différences entre les moments d'inertie principaux, et par suite les moments L, M, N, sont peu considérables vis-à-vis de la masse de la Terre. Or, si l'axe de rotation de la Terre était réellement fixe dans ce corps, et les moments L, M, N tout à fait nuls, l'axe de rotation serait un axe principal d'inertie, suivant la propriété caractéristique dont jouissent les axes principaux d'inertie d'être axes permanents de rotation. D'après cela, nous pouvons supposer, sans qu'il en résulte une erreur sensible, que la rotation de la Terre s'effectue autour d'un axe principal d'inertie.

La figure de la Terre est celle d'un solide de révolution autour de son axe de rotation; et tout porte à croire que les deux axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité qui sont situés dans le plan de l'équateur, ont des moments égaux. Nous prendrons l'équateur pour plan XOY, et nous poserons

$$B = A.$$

L'aplatissement de la Terre vers les pôles nous conduit à supposer encore

$$C > A.$$

Ainsi nous avons

$$L = \frac{3m(C-A)}{r^5}yz, \quad M = -\frac{3m(C-A)}{r^5}zx, \quad N = 0.$$

III.

Dorénavant, nous prendrons l'axe OX constamment dirigé vers l'équinoxe de printemps, et l'axe OY dirigé du côté du solstice d'été. Ces deux axes ne cesseront pas d'être axes principaux d'inertie de la Terre.

Nous déterminerons le mouvement par la méthode de la composition des couples. Les couples L et M, en agissant pendant l'instant infiniment petit dt, communiquent à la Terre deux vitesses de rotation infiniment petites autour des axes OX et OY. Les quantités de mouvement qui naissent de ces vitesses de rotation ont pour moments autour des mêmes axes les produits Ldt et Mdt; car les moments des forces effectives sont égaux aux moments des forces appliquées.

Ainsi, les quantités de mouvement que possède la Terre à la fin de l'instant dt, considérées comme des forces et transportées à l'origine, donnent naissance à trois couples autour des trois axes OX, OY, OZ. Les deux premiers couples ont leurs moments égaux à $L\,dt$, $M\,dt$; le troisième est le couple des quantités de mouvement qui animaient la Terre au commencement de l'instant considéré. Si l'on représente par G le moment de ce dernier couple, et que l'on nomme ρ la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe, on a

$$G = \rho C.$$

Ces trois couples se composent en un seul. Si l'on convient de représenter chaque couple par une droite dirigée suivant l'axe et proportionnelle au moment, le couple résultant dont il s'agit sera représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur les axes OX, OY, OZ avec des longueurs proportionnelles à $L\,dt$ $M\,dt$, G. Les deux premières arêtes du parallélipipède étant infiniment petites en comparaison de la troisième, la diagonale fera un angle infiniment petit avec la troisième arête, et, par suite, elle aura même longueur. D'ailleurs la direction de la diagonale sera celle de l'axe de révolution du globe terrestre à la fin de l'instant dt, puisque nous admettons que la rotation de la Terre s'effectue à chaque instant autour de son axe de figure. Les attractions du Soleil et de la Lune dévient donc l'axe de la Terre, à chaque instant, sans changer la vitesse de rotation autour de cet axe.

Nous étudierons isolément le déplacement qui serait produit par chacun des couples moteurs, si ce couple agissait seul. La somme algébrique de ces déplacements sera le déplacement résultant de l'action simultanée de tous ces couples aux quantités près de l'ordre du carré des moments des couples accélérateurs. Mais avant d'entreprendre cette étude, il est convenable de mettre les produits $L\,dt$, $M\,dt$ sous une forme nouvelle.

IV.

Soient

a la distance moyenne de la Terre au Soleil;

e l'excentricité de l'orbitre terrestre;

n le moyen mouvement de la Terre dans son orbite;

v la longitude géocentrique du Soleil;

ϖ la longitude du périgée;

h le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil.

La théorie du mouvement elliptique appliquée au mouvement apparent du Soleil autour du centre de la Terre, donne les formules

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}, \quad r^2 dv = na^2\sqrt{1-e^2}\,dt, \quad m(1+h) = n^2a^3.$$

On en tire

$$\frac{m}{r^3}dt = \frac{n[1+e\cos(v-\varpi)]}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}dv,$$

et, par suite,

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{L}\,dt = \dfrac{3n(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{yz}{r^2}[1+e\cos(v-\varpi)]\,dv, \\ \mathrm{M}\,dt = -\dfrac{3n(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{zx}{r^2}[1+e\cos(v-\varpi)]\,dv. \end{cases}$$

Ces formules s'appliquent à la Lune comme au Soleil, en conservant aux lettres qui y figurent la même signification relativement à la Terre.

V.

Action du Soleil.

Il nous faut substituer aux coordonnées rectangulaires du Soleil la distance r, la longitude v et l'obliquité θ de l'équateur XOY sur l'écliptique XOE.

Les formules de transformation sont les suivantes :

$$x = r\cos v, \quad y = r\cos\theta\sin v, \quad z = r\sin\theta\sin v.$$

Elles donnent

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{yz}{r^2} = \dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\cos 2v), \\ \dfrac{zx}{r^2} = \dfrac{1}{2}\sin\theta\sin 2v. \end{cases}$$

1°. *Couple* L. — Composant d'après la loi du parallélogramme le

couple $L\,dt$ avec le couple G, on obtient un nouveau couple dont l'axe OG′ représente la position que prendrait l'axe terrestre à la fin de l'instant dt, si le couple L agissait seul. Ainsi, par l'effet du couple L, l'axe terrestre ou la perpendiculaire à l'équateur tourne pendant l'instant dt d'un angle infiniment petit $d\upsilon$ autour du rayon OY de l'équateur. Ce rayon étant perpendiculaire à l'intersection de l'équateur et de l'écliptique, il s'ensuit que la rotation $d\upsilon$ a pour unique effet de déplacer l'intersection de l'équateur sur l'écliptique sans changer l'angle des deux plans.

Soit $d\psi$ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé en tournant dans le plan de l'écliptique.

Cet angle est le même que l'angle décrit par la projection de l'axe terrestre sur l'écliptique; car cette projection est constamment perpendiculaire à la ligne des équinoxes. Il s'ensuit qu'on a l'équation

$$d\psi = \frac{d\upsilon}{\sin\vartheta}.$$

D'ailleurs, en négligeant les puissances de $d\upsilon$ supérieures à la première, le triangle GOG′ donne

$$d\upsilon = \frac{L\,dt}{G};$$

par conséquent,

$$d\psi = \frac{L\,dt}{G\sin\vartheta} \quad \text{ou} \quad d\psi = \frac{L\,dt}{\rho\,C\sin\vartheta}.$$

Si l'on substitue ici les valeurs (1) et (2) en négligeant le rapport h dont la valeur est au plus $\frac{1}{350000}$, et que l'on pose, pour abréger,

$$\frac{3}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{n}{\varepsilon}\frac{C-A}{C} = H,$$

il vient

$$d\psi = H\cos\vartheta\,(1-\cos 2\,v)\,[1+e\cos(v-\varpi)]\,dv.$$

Soit prise l'origine du temps à l'équinoxe de printemps pour une année déterminée, et soit ψ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé sur le plan de l'écliptique depuis l'origine du temps.

Cet angle ψ sera fourni par l'intégration de l'équation précédente;

mais, comme cet angle varie avec une extrême lenteur, on pourra sans erreur sensible négliger dans ce calcul les variations de l'angle θ, lesquelles ne s'élèvent pas à plus de 10″ de part et d'autre de la valeur moyenne. On pourra négliger encore parmi les termes périodiques de l'intégrale ceux qui contiennent en facteur l'excentricité e.

Si donc on remplace l'angle variable θ par un angle constant θ', dont la valeur soit comprise entre les valeurs extrêmes de l'angle θ, on obtient

$$\psi = \mathrm{H}\cos\theta'\left(v - \frac{1}{2}\sin 2v\right),$$

ou bien, puisque la longitude v est égale à nt plus les termes périodiques qui contiennent l'excentricité en facteur,

$$\psi = \mathrm{H}n\cos\theta'.t - \frac{1}{2}\mathrm{H}\cos\theta'\sin 2v. \tag{3}$$

Cet angle ψ mesure la *précession solaire* des équinoxes. Il se compose de deux parties : l'une croît proportionnellement au temps, c'est la *précession solaire moyenne;* l'autre se reproduit périodiquement de six mois en six mois, et par suite elle est beaucoup moins sensible que la précession moyenne.

2°. *Couple* M. — Composant le couple M dt avec le couple G, on obtient un nouveau couple dont l'axe OG″ représente la position que prendrait l'axe terrestre à la fin de l'instant dt, si le couple M agissait seul. On voit que l'effet de ce couple pendant l'instant dt se réduit à faire varier l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique, d'un angle

$$\mathrm{GOG}'' = d\theta = \frac{\mathrm{M}\,dt}{\mathrm{G}} = -\mathrm{H}\sin\theta\sin 2v\left[1 + e\cos(v - \varpi)\right]dv.$$

En intégrant avec le même degré d'approximation que dans le calcul de l'angle ψ, on trouve

$$\theta = \theta' + \frac{1}{2}\mathrm{H}\sin\theta'\cos 2v. \tag{4}$$

pourvu que l'on attribue une valeur convenable à la constante θ'.

La différence $\theta - \theta'$ mesure la *nutation solaire* de l'axe terrestre. Cette nutation a une période semi-annuelle; elle est peu sensible.

VI.

Action de la Lune.

Occupons-nous maintenant de la Lune. Conservons aux lettres qui figurent dans les formules précédentes la même signification relative à la Terre; mais marquons de l'indice 1 celles qui se rapportent à la Lune, de manière que, par exemple, h étant le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil, h_1 soit le rapport de la masse de la Terre à celle de la Lune.

En outre, nommons i l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, et λ la longitude du nœud ascendant de la Lune.

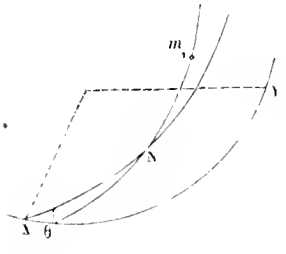
Nous avons, d'après les formules (1),

$$L_1\,dt = \frac{3n_1(C-A)}{(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{y_1 z_1}{r_1^2}\left[1+e_1\cos(v_1-\varpi_1)\right]dv_1,$$

$$M_1\,dt = -\frac{3n_1(C-A)}{(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{z_1 x_1}{r_1^2}\left[1+e_1\cos(v_1-\varpi_1)\right]dv_1,$$

x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées de la Lune par rapport aux axes OX, OY, OZ.

Il nous faut exprimer ces coordonnées en fonction de la longitude de la Lune. Pour cela, figurons une sphère décrite du centre de gravité de la Terre comme centre avec un rayon égal à l'unité, et marquons sur cette sphère la trace m_1 du rayon vecteur de la Lune, l'équateur XY, l'écliptique XN et l'orbite lunaire Nm_1. L'arc XN sera la longitude du nœud, et la somme des deux arcs XN, Nm_1 non situés dans un même plan sera la longitude de la Lune, ou v_1.



Nous cherchons les valeurs des coordonnées en vue de les substituer dans les expressions de $\frac{L_1\,dt}{G}$ et de $\frac{M_1\,dt}{G}$, lesquelles contiennent en facteur le produit $\frac{1}{1+h_1}\frac{n_1}{\rho}\frac{C-A}{C}$ qui est certainement très-petit. Il est donc

inutile de calculer ces valeurs fort exactement. Aussi nous négligerons dans ce calcul le cube de l'angle i, angle dont la valeur est à peu près $5^\circ 9'$ ou $\frac{1}{11}$ du rayon.

Soient x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de la Lune, prises par rapport à trois axes dont l'origine est au centre de la Terre, et qui sont dirigés, le premier suivant la direction OX de l'équinoxe de printemps, le second suivant une perpendiculaire située dans le plan de l'écliptique, et le troisième suivant une perpendiculaire à l'écliptique.

Nous avons d'abord

$$\begin{aligned} x'_1 &= r_1 \left[\cos\lambda\cos(v_1-\lambda) - \sin\lambda\sin(v_1-\lambda)\cos i\right] \\ &= r_1\left[\cos v_1 + \frac{i^2}{2}\sin\lambda\sin(v_1-\lambda)\right], \\ y'_1 &= r_1\left[\sin\lambda\cos(v_1-\lambda) + \cos\lambda\sin(v_1-\lambda)\cos i\right] \\ &= r_1\left[\sin v_1 - \frac{i^2}{2}\cos\lambda\sin(v_1-\lambda)\right], \\ z'_1 &= r_1 i\sin(v_1-\lambda); \end{aligned}$$

puis, par les formules de transformation des coordonnées en géométrie plane,

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1, \\ y_1 &= y'_1\cos\theta - z'_1\sin\theta, \\ z_1 &= y'_1\sin\theta + z'_1\cos\theta. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à substituer les expressions précédentes de x'_1, y'_1, z'_1, dans ces dernières formules, et nous aurons les valeurs cherchées.

Actuellement, nous devons calculer les produits $\frac{y_1 z_1}{r_1^2}$, $\frac{z_1 x_1}{r_1^2}$ qui figurent dans les expressions des moments des couples accélérateurs; et, dans ce calcul, nous devons encore négliger les puissances de i supérieures à la seconde. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{y_1 z_1}{r_1^2} &= \sin\theta\cos\theta\sin^2 v_1 + i(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin v_1\sin(v_1-\lambda) \\ &\quad - i^2\sin\theta\cos\theta\cos\lambda\sin v_1\sin(v_1-\lambda) - i^2\sin\theta\cos\theta\sin^2(v_1-\lambda), \\ \frac{z_1 x_1}{r_1^2} &= \sin\theta\sin v_1\cos v_1 + i\cos\theta\cos v_1\sin(v_1-\lambda) \\ &\quad - \frac{i^2}{2}\sin\theta\sin(v_1-\lambda)\cos(v_1+\lambda). \end{aligned}$$

1°. *Couple* L_1. — Si l'on nomme ψ l'angle dont rétrograde la ligne des équinoxes pendant le temps t, en vertu de l'action du couple L_1, on a l'équation

$$d\psi = \frac{L_1\, dt}{G \sin\theta}.$$

Posant

$$\frac{3}{2(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{n_1}{\rho}\,\frac{C-A}{C} = H_1,$$

cette équation peut s'écrire

$$d\psi = \frac{2H_1}{1+h_1}\,\frac{y_1 z_1}{r_1^2 \sin\theta}\,[1 + e_1\cos(v_1 - \varpi_1)]\,dv_1;$$

et il faut concevoir que le rapport $\frac{y_1 z_1}{r_1^2}$ soit ici remplacé par la valeur obtenue précédemment.

Dans l'intégration qui doit donner l'angle ψ, nous pourrons regarder comme constants, non-seulement l'angle θ, mais aussi l'angle i; car l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique varie extrêmement peu. Nous négligerons encore les termes périodiques qui sont multipliés par l'excentricité e_1; en sorte que nous pourrons remplacer v_1 par $n_1 t +$ const. Quant à la longitude du nœud λ, nous savons qu'elle diminue d'une circonférence en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ, d'un mouvement à peu près uniforme; par suite, nommant $-\alpha$ la vitesse angulaire moyenne du nœud, nous pourrons remplacer λ par $-\alpha t +$ const.

Ceci posé, il suffit de remplacer, dans l'expression de $d\psi$, les produits de sinus variables par les cosinus de la somme et de la différence des arcs, et l'intégration se fera immédiatement. Mais, parmi les termes périodiques de la différentielle, outre que nous négligerons ceux qui sont multipliés par e_1, nous négligerons encore ceux qui dépendent de v_1 et qui sont multipliés par i; car l'intégrale de ces termes aura en diviseur le nombre n_1, tandis que l'intégrale des termes dépendant seulement de λ aura en diviseur le nombre α, lequel est beaucoup plus petit que n_1.

La différentielle $d\psi$ se réduit donc à la valeur suivante :

$$(5)\quad d\psi = \frac{H_1}{1+h_1}\left[\begin{array}{c}\cos\theta' - \cos\theta'\cos 2v_1 + i\dfrac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\cos\lambda \\ -\dfrac{i^2}{2}\cos\theta'(3+\cos 2\lambda)\end{array}\right] dv_1.$$

L'intégrale est

$$(6)\quad \psi = \frac{H_1}{1+h_1}\left[\begin{array}{c} n_1\left(1-\dfrac{3i^2}{2}\right)\cos\theta'.t - \dfrac{1}{2}\cos\theta'\sin 2v_1 - i\dfrac{n_1}{\alpha}\dfrac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sin\lambda \\ +\dfrac{i^2}{4}\dfrac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\sin 2\lambda\end{array}\right].$$

Cet angle ψ mesure la *précession lunaire* des équinoxes; le premier terme croît proportionnellement au temps, il mesure la *précession lunaire moyenne*. Parmi les autres termes, le plus sensible est le terme en $\sin\lambda$, c'est-à-dire celui dont la période est égale à la durée de la révolution du nœud de la Lune.

2°. *Couple* M_1. — Si l'on nomme $d\theta$ la variation de l'obliquité de l'équateur qui est due à l'action du couple M_1 pendant l'instant dt, on a

$$d\theta = \frac{M_1\,dt}{G}.$$

En opérant comme pour le calcul de ψ, on réduit la différentielle $d\theta$ à la valeur suivante :

$$(7)\quad d\theta = \frac{H_1}{1+h_1}\left(-\sin\theta'\sin 2v_1 + i\cos\theta'\sin\lambda - \frac{i^2}{2}\sin\theta'\sin 2\lambda\right)dv_1;$$

et, si l'on détermine convenablement la constante θ', l'intégrale est

$$(8)\quad \theta = \theta' + \frac{H_1}{1+h_1}\left(\frac{1}{2}\sin\theta'\cos 2v_1 + i\frac{n}{\alpha}\cos\theta'\cos\lambda - \frac{i^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\sin\theta'\cos 2\lambda\right).$$

La différence $\theta - \theta'$ mesure la *nutation lunaire* de l'axe terrestre. le terme en $\cos\lambda$ est le plus sensible; l'ensemble de ce terme et du terme en $\sin\lambda$ qui figure dans la formule (6), exprime que l'axe terrestre décrit une petite ellipse sur la sphère céleste. Le centre de cette ellipse marque constamment la position moyenne de l'axe terrestre, qui est

définie par l'angle θ' et par la précession moyenne totale. Le grand axe de l'ellipse est constamment dirigé vers le pôle de l'écliptique; la courbe est décrite en sens contraire de la rotation de la Terre autour de son axe, elle est parcourue dans le même temps que le nœud de la Lune fait le tour de l'écliptique, et d'un mouvement tel, que l'anomalie excentrique λ croît proportionnellement au temps

VII.

Correction due au déplacement de l'écliptique.

En égalant l'angle ψ à la somme des deux parties (3) et (6), et égalant de même l'angle $\theta - \theta'$ à la somme des deux parties (4) et (8), on obtient des formules qui représentent avec exactitude le mouvement de l'axe terrestre pendant un petit nombre d'années. Mais si l'on veut des formules qui représentent pendant deux ou trois siècles tout ce que les observations les plus exactes peuvent accuser relativement au mouvement de rotation de la Terre, il est nécessaire d'avoir égard au déplacement de l'écliptique produit par l'attraction des planètes.

Comme l'écliptique se déplace fort peu pendant le petit nombre de siècles que l'on prétend embrasser, il n'y a pas lieu de recommencer les calculs qui ont été faits en considérant ce plan comme fixe; il suffira de corriger légèrement les formules par des termes additionnels.

Dans ce calcul, nous continuerons de rapporter le mouvement de l'axe terrestre au plan fixe qui coïncide avec l'*écliptique vraie* à l'origine du temps t. Nous appellerons ce plan fixe l'*écliptique fixe*. L'angle ψ sera toujours l'angle dont l'intersection de l'équateur et de l'écliptique fixe a rétrogradé sur ce dernier plan, depuis l'époque prise pour origine du temps. θ désignera toujours l'angle compris entre l'équateur et l'éclitique fixe. En outre, nous nommerons γ l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, et β l'angle qui sépare les traces de l'équateur et de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe.

1°. *Action du Soleil.* — Le mouvement du Soleil autour de la Terre sur l'écliptique mobile est tout semblable au mouvement de la Lune autour de la Terre dans l'hypothèse d'une écliptique immobile. Par conséquent, des calculs tout pareils à ceux du paragraphe précédent conduisent à des formules semblables aux formules (5) et (7), sauf

que i est remplacé par γ, et λ par β, outre que l'indice 1 est supprimé. Dans ces formules, les termes indépendants de γ sont ceux qu'on a déjà obtenus en supposant l'écliptique immobile, les termes en γ^2 peuvent être négligés sans erreur appréciable ; donc les termes qu'il faut ajouter aux valeurs (3) et (4) des angles ψ et θ, quand on veut avoir égard au déplacement de l'écliptique, se réduisent aux intégrales des seuls termes qui contiennent la première puissance de γ dans les formules correspondantes aux formules (5) et (7). Ces termes additionnels sont

$$\text{pour l'angle } \psi, \quad \mathrm{H}n\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\int \gamma\cos\beta\,dt,$$

$$\text{pour l'angle } \theta, \quad \mathrm{H}n\cos\theta'\int \gamma\sin\beta\,dt.$$

Or la théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes autour du Soleil donne les relations

$$\gamma\cos(\beta-\psi) = \sum k\cos(gt+\delta),$$

$$\gamma\sin(\beta-\psi) = \sum k\sin(gt+\delta),$$

dans lesquelles k, g, δ représentent des constantes qui dépendent des différentes planètes perturbatrices, et $\sum$ indique une somme relative à toutes ces planètes.

On tire de ces relations

$$\gamma\cos\beta = \sum k\cos(gt+\psi+\delta),$$

$$\gamma\sin\beta = \sum k\sin(gt+\psi+\delta).$$

Les coefficients k étant tous très-petits, on peut remplacer l'angle ψ par sa valeur moyenne dans les expressions de $\gamma\cos\beta$ et de $\gamma\sin\beta$. D'après l'observation, ou d'après les formules obtenues en supposant l'écliptique immobile, cette valeur moyenne augmente à peu près de $50'',3$ en une année.

Si donc on prend l'année pour unité de temps, les angles ψ et θ qui résultent de l'action du Soleil, quand on a égard au déplacement de

l'écliptique, sont donnés par les formules

$$(9)\quad \begin{cases} \psi = \mathrm{H}\, n \cos\theta' \,.\, t - \frac{1}{2}\mathrm{H}\cos\theta' \sin 2v \\ \quad + \mathrm{H}\, n \dfrac{\cos^2\theta'}{\sin\theta'} \displaystyle\sum \frac{k}{g + 50'',3} \sin[(g + 50'',3)\, t + \delta], \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \theta = \theta' + \frac{1}{2}\mathrm{H}\sin\theta' \cos 2v \\ \quad - \mathrm{H}\, n \cos\theta' \displaystyle\sum \frac{k}{g + 50'',3} \cos[(g + 50'',3)\, t + \delta]. \end{cases}$$

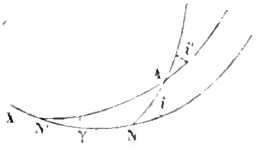
2°. *Action de la Lune.* — Soient i' l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, et λ' la longitude du nœud de la Lune, comptée sur l'écliptique vraie.

Les seuls termes des formules (5) et (7) qui soient altérés par le déplacement de l'écliptique, sont ceux qui contiennent les angles i et λ. Quand on néglige le carré de l'angle γ et le produit $i\gamma$, les termes en i^2 ne subissent pas d'autre altération que le changement de i et de λ en i' et en λ'; les termes

$$\frac{\mathrm{H}_1}{1+h_1}\, i \frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} \cos\lambda\, dv_1, \quad \frac{\mathrm{H}_1}{1+h_1}\, i \cos\theta' \sin\lambda\, dv_1$$

éprouvent une altération plus complexe. Pour la calculer, il faut exprimer les produits $i\cos\lambda$ et $i\sin\lambda$ en fonction de i', λ', γ et β.

Soient XN'N l'écliptique fixe, NA l'orbite lunaire, N'A l'écliptique vraie, X l'équinoxe, pris sur l'écliptique fixe.



On a

$$\overline{\mathrm{XN'}} = \beta, \quad \overline{\mathrm{XN}} = \lambda, \quad \overline{\mathrm{XN'}} + \overline{\mathrm{N'A}} = \lambda'.$$

Le triangle NAN' donne les relations

$$\cot\overline{\mathrm{AN}} \sin\overline{\mathrm{AN'}} = \cos\overline{\mathrm{AN'}} \cos i' + \sin i' \cot\gamma,$$
$$\cot\overline{\mathrm{AN'}} \sin\overline{\mathrm{AN}} = \cos\overline{\mathrm{AN}} \cos i' - \sin i' \cot i.$$

Dans le calcul dont on s'occupe, on peut négliger les secondes puissances des petits angles i et i'. Alors $\overline{\mathrm{AN}}$ devient égal à $\lambda' - \lambda$, et, par

suite, les deux relations précédentes peuvent s'écrire

$$i' \sin(\lambda' - \lambda) = \gamma \sin(\lambda - \beta),$$
$$i' \sin(\lambda' - \beta) = i \sin(\lambda - \beta).$$

Sous cette forme, on en déduit facilement les valeurs cherchées,

$$i \cos\lambda = i' \cos\lambda' + \gamma \cos\beta,$$
$$i \sin\lambda = i' \sin\lambda' + \gamma \sin\beta.$$

D'après cela, les termes en question deviennent

$$\frac{H_1}{1+h_1} \frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} (i' \cos\lambda' + \gamma \cos\beta)\, dv_1, \quad \frac{H_1}{1+h_1} \cos\theta' (i' \sin\lambda' + \gamma \sin\beta) dv_1.$$

Les angles ψ et θ qui résultent de l'influence de la Lune, quand on a égard au déplacement de l'écliptique, sont donc

$$(11)\quad \psi = \frac{H_1}{1+h_1} \left\{ \begin{array}{l} n_1 \left(1 + \frac{3i'^2}{2}\right) \cos\theta' . t - \frac{1}{2} \cos\theta' \sin 2v_1 - i' \frac{n_1}{\alpha} \frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} \sin\lambda' + \frac{i'^2}{4} \frac{n_1}{\alpha} \cos\theta' \sin 2\lambda' \\ + n_1 \frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} \sum \frac{k}{g + 50'',3} \sin[(g + 50'',3)\, t + \delta] \end{array} \right\},$$

$$(12)\quad \theta = \theta' + \frac{H_1}{1+h_1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin\theta' \cos 2v_1 + i' \frac{n_1}{\alpha} \cos\theta' \cos\lambda' - \frac{i'^2}{4} \frac{n_1}{\alpha} \sin\theta' \cos 2\lambda' \\ - n_1 \cos\theta' \sum \frac{k}{g + 50'',3} \cos[(g + 50'',3)\, t + \delta) \end{array} \right\}.$$

VIII.

Si l'on réunit les parties obtenues séparément (9) et (11), (10) et (12), on a la représentation complète du mouvement de l'axe terrestre par les formules

$$\psi = (c + c')\, t - \frac{b}{\sin\theta'} \sin\Omega - F \cos\theta' \sin 2\odot - F' \cos\theta' \sin 2\mathbb{C}$$
$$+ G \cos\theta' \sin 2\Omega + K \frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} \sum \frac{k}{g + 50'',3} \sin[(g + 50'',3)\, t + \delta),$$

$$\theta = \theta' + a \cos\Omega + F \sin\theta' \cos 2\odot + F' \sin\theta' \cos 2\mathbb{C} - G \sin\theta' \cos 2\Omega$$
$$- K \cos\theta' \sum \frac{k}{g + 50'',3} \cos[(g + 50'',3)\, t + \delta],$$

dans lesquelles on a remplacé λ', ν et ν_1 par les signes communément employés Ω, $\odot$ et $\mathbb{C}$, et l'on a posé

$$c = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n^2\cos\theta'}{\rho(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad c' = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n_1^2\left(1-\frac{3i'^2}{2}\right)\cos\theta'}{\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$a = \frac{3}{2}\frac{C-A}{A}\frac{n_1^2 i'\cos\theta'}{\alpha\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad b = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n_1^2 i'\cos 2\theta'}{\alpha\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F = \frac{3}{4}\frac{C-A}{C}\frac{n}{\rho(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F' = \frac{3}{4}\frac{C-A}{C}\frac{n_1}{\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$G = \frac{3}{8}\frac{C-A}{C}\frac{n_1 i'^2}{\alpha\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad K = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\left[\frac{n^2}{\rho(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n_1^2}{\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Les sommes

$$\sum \frac{k}{g+50'',3}\sin[(g-50'',3)t+\delta],$$

$$\sum \frac{k}{g+50'',3}\cos[(g+50'',3)t+\delta],$$

peuvent être remplacées par leurs développements suivant les puissances ascendantes des temps bornés aux premières et secondes puissances ; car les constantes k, g, sont de très-petites quantités. On reconnaît aisément que, dans le développement de la seconde somme, le coefficient de la première puissance du temps est nécessairement nul. En effet, l'expression de ce coefficient est $-\sum k\sin\delta$; or, si l'on pose $t = 0$ dans l'équation

$$\gamma\sin(\beta-\psi) = \sum k\sin(gt+\delta),$$

qui, comme nous l'avons vu, sert à définir les constantes k et δ, le premier membre de cette équation devient nul, puisque l'écliptique vraie coïncide alors avec l'écliptique fixe, et le second membre se réduit à $\sum k\sin\delta$.

Si l'on veut réduire les formules en nombres, il faudra s'aider de l'observation du phénomène pour calculer le rapport des moments

d'inertie de la Terre $\frac{C-A}{C}$, qui n'est point connu d'ailleurs. On pourra, par exemple, égaler l'expression analytique du coefficient du temps dans la valeur trouvée de ψ, à la précession moyenne qui résulte de l'observation ; puis on tirera de cette équation une valeur du rapport $\frac{C-A}{C}$ que l'on substituera dans les autres coefficients des formules.

D'apres Bessel, si l'on prend l'origine du temps au commencement de l'année 1750, on a

$$\begin{aligned}\psi &= 50'',37572\,t - 0'',0001217945\,t^2 - 16'',78332\sin\Omega \\ &\quad - 1'',33589\sin 2\odot - 0''.20128\sin 2\mathbb{C} + 0'',20209\sin 2\Omega,\\ \vartheta &= 23^\circ\,28'\,18'',0 + 0'',0000984233\,t^2 + 8'',97707\cos\Omega \\ &\quad + 0'',57990\cos 2\odot + 0'',08738\cos 2\mathbb{C} - 0'',08773\cos 2\Omega.\end{aligned}$$

Si l'on se propose de construire des formules qui représentent le mouvement de l'axe terrestre d'année en année, on conservera au temps une même valeur entière, pendant toute la durée d'une année, dans les développements des deux termes qui proviennent du déplacement séculaire de l'écliptique, et, pour plus de rigueur, dans les autres coefficients on remplacera l'angle ϑ par sa valeur initiale augmentée de la valeur du terme séculaire

$$-K\cos\vartheta'\sum\frac{k}{g+50'',3}\cos[(g+50'',3)\,t+\delta]$$

pour l'année considérée. De cette manière, les formules seront réduites, pour chaque année, à la forme

$$\begin{aligned}\psi &= Dt + D'\sin\Omega + D''\sin 2\odot + D'''\sin 2\mathbb{C} + D^{IV}\sin 2\Omega,\\ \vartheta &= E + E'\cos\Omega + E''\cos 2\odot + E'''\cos 2\mathbb{C} + E^{IV}\cos 2\Omega,\end{aligned}$$

et les termes séculaires donneront la correction annuelle des coefficients D, D',..., E, E',.... C'est ainsi que sont disposées les formules données dans les recueils astronomiques. (Voir le *Nautical Almanach*, p. v.)

Enfin il peut être utile de rapporter le mouvement de la Terre à l'écliptique vraie.

Pour cela, nommons Ψ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé sur l'écliptique vraie pendant le temps t. Θ l'angle compris entre l'équateur et l'écliptique vraie, et considérons l'équateur, l'écliptique fixe et l'écliptique vraie comme trois grands cercles tracés sur une sphère de rayon égal à l'unité.

Quand on néglige le carré de l'inclinaison mutuelle des deux écliptiques, la différence $\psi - \Psi$ est égale à la projection sur l'écliptique vraie du petit arc intercepté sur l'équateur par les deux écliptiques; sa valeur est donc

$$\cot\Theta \cdot \gamma \sin\beta, \quad \text{ou bien} \quad \cot\theta' \cdot \gamma \sin\beta,$$

en négligeant le produit $\gamma(\Theta - \theta')$.

Le triangle formé par les trois grands cercles considérés donne

$$\cos\Theta = \cos\theta \cos\gamma - \sin\theta \sin\gamma \cos\beta,$$

ou bien, en négligeant le carré de γ et le carré de la différence $\Theta - \theta$,

$$\theta - \Theta = -\gamma \cos\beta.$$

On a donc finalement

$$\Psi = \psi - \cot\theta' \sum k \sin[(g + 50'',3)\,t + \delta],$$

$$\Theta = \theta + \sum k \cos[(g + 50'',3)\,t + \delta].$$

Quand on prend l'origine du temps au commencement de l'année 1750, les formules numériques réduites aux termes du premier et du second degré par rapport au temps, sont, d'après Bessel,

$$\Psi = \psi - 0'',17926\,t + 0'',000026\,60294\,t^2,$$

$$\Theta = \theta - 0'',48368\,t - 0'',000002\,72295\,t^2.$$

Une discussion complète des formules n'entre point dans l'objet de ce Mémoire; le peu que nous en avons dit doit suffire. Notre but unique était d'arriver à ces résultats connus, d'une manière plus simple qu'on ne l'avait fait jusqu'ici. Il nous paraît atteint, puisque toute la méthode se réduit à des compositions de couples suivant la

loi du parallélogramme, et que tout le calcul consiste dans des intégrations immédiates [*].

En réfléchissant sur la marche que nous avons suivie, on reconnaît facilement que le succès est dû, d'une part à ce que tout rayon de l'équateur, et par conséquent la ligne des équinoxes, est un axe principal d'inertie de la Terre relatif au centre; de l'autre, à ce que les termes d'un degré supérieur par rapport aux moments des forces accélératrices sont tout à fait négligeables.

---

[*] Lorsque j'écrivais ce Mémoire, je n'avais point connaissance du travail de M. Peters (*Numerus constans nutationis ex ascensionibus rectis stellæ Polaris in specula Dorpatensi ab anno* 1822 *ad* 1838 *observatis deductus*), dans lequel l'habile astronome a complété les formules de Bessel, en tenant compte de petites quantités qui, en effet, ne sont point tout à fait négligeables dans l'état actuel de l'Astronomie. Je me propose d'indiquer prochainement dans une Note complémentaire les légères modifications qu'il faut apporter aux calculs exposés dans le présent Mémoire pour arriver aux formules de M. Peters, et même à des formules plus exactes encore, si jamais le besoin s'en fait sentir. J.

DÉMONSTRATION NOUVELLE

D'UNE

FORMULE DE M. WILLIAM THOMSON;

PAR M. J. LIOUVILLE.

M. William Thomson a donné dans un des numéros de ce Journal une formule curieuse que voici : Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables en nombre $n > 1$, et $g, h, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ des constantes réelles, les deux premières g et h positives. Désignons par Z l'intégrale, prise de $-\infty$ à $+\infty$ pour toutes les variables, de la formule différentielle

$$\frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{[g^2 + (\xi_1 - a_1)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2]^{\frac{n+1}{2}} \, [h^2 + (\xi_1 - b_1)^2 + \ldots + (\xi_n - b_n)^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

En posant

$$c = (a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2,$$

on aura

$$g \cdot Z = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{[c + (g+h)^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

le signe Γ désignant à l'ordinaire l'intégrale eulérienne de seconde espèce.

M. W. Thomson donne de cette formule deux démonstrations fort élégantes. La démonstration nouvelle que je vais exposer paraît plus simple encore : elle repose d'ailleurs sur des principes complétement différents.

D'abord si l'on remplace par deux exposants positifs quelconques p, q les exposants $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$ qui figurent dans l'élément de l'in-

tégrale Z, de manière que cette intégrale Z devienne

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{P^p Q^q},$$

en posant, pour abréger,

$$P = g^2 + (\xi_1 - a_1)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2,$$

et

$$Q = h^2 + (\xi_1 - b_1)^2 + \ldots + (\xi_n - b_n)^2,$$

l'intégrale multiple ainsi généralisée se réduira toujours à une intégrale simple.

En effet, on a

$$\frac{1}{P^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-\alpha P} \alpha^{p-1} d\alpha,$$

et

$$\frac{1}{Q^q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty e^{-\beta Q} \beta^{q-1} d\alpha.$$

La substitution de ces valeurs dans l'intégrale Z introduira l'exponentielle

$$e^{-(\alpha P + \beta Q)},$$

et l'on aura

$$Z = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^\infty \alpha^{p-1} d\alpha \int_0^\infty \beta^{q-1} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha P + \beta Q)} d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Or l'exposant $\alpha P + \beta Q$ peut se mettre sous la forme

$$\alpha g^2 + \beta h^2 + \frac{c \cdot \alpha\beta}{\alpha + \beta} + (\alpha + \beta)(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2),$$

en donnant à c la signification marquée plus haut et en posant

$$\xi_1 - \frac{\alpha a_1 + \beta b_1}{\alpha + \beta} = \zeta_1, \ldots, \qquad \xi_n - \frac{\alpha a_n + \beta b_n}{\alpha + \beta} = \zeta_n.$$

On peut substituer aux variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les variables $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$; les limites continueront à être $-\infty$, $+\infty$, et le produit $d\xi_1 \ldots d\xi_n$ sera remplacé par $d\zeta_1 \ldots d\zeta_n$. Cela posé, toutes les intégrations relatives à $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ s'effectueront séparément au moyen de la formule

connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\zeta^2}\, d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}},$$

et il viendra

$$Z = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha g^2+\beta h^2+\frac{c\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)} \frac{\alpha^{p-1}\beta^{q-1}\, d\alpha\, d\beta}{(\sqrt{\alpha+\beta})^n}.$$

Posons

$$\alpha = rt, \qquad \beta = r(1-t);$$

les limites pour r et t seront respectivement o et ∞, o et 1 ; le produit $d\alpha d\beta$ devra être remplacé par $r\,dr\,dt$, et l'intégration relative à r deviendra facile en se rappelant que

$$\int_0^{\infty} e^{-kr} r^{s-1}\, dr = \frac{\Gamma(s)}{k^s}.$$

On trouvera de la sorte

$$Z = \frac{(\sqrt{\pi})^n \Gamma\left(p+q-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt}{[g^2 t + h^2(1-t) + ct(1-t)]^{p+q-\frac{n}{2}}}.$$

Nous voilà donc parvenus, quels que soient les exposants p et q, à une intégrale simple. Mais si l'on prend maintenant, avec M. Thomson,

$$p = \frac{n+1}{2}, \qquad q = \frac{n-1}{2},$$

on verra qu'en faisant

$$\frac{n}{2} - 1 = \mu,$$

on a

$$p - 1 = \mu + \frac{1}{2}, \quad q - 1 = \mu - \frac{1}{2}, \quad p + q - \frac{n}{2} = \mu + 1 :$$

l'intégrale relative à t dans la formule ci-dessus prendra donc alors la forme

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\, dt}{[g^2 t + h^2(1-t) + ct(1-t)]^{\mu+1}},$$

et par conséquent elle sera égale à

$$\frac{\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{g.\Gamma(\mu+1)\left[c+(g+h)^2\right]^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

d'après ce que j'ai démontré récemment dans ce Journal (*voir* le cahier de *novembre*, page 421). Substituant après avoir remplacé μ par $\frac{n}{2}-1$, mettant d'ailleurs pour p et q leurs valeurs sous les Γ, puis réduisant et multipliant par g, on obtiendra pour $g.Z$ la valeur écrite plus haut, que M. Thomson a trouvée le premier.

Je viens de déduire la formule de M. Thomson de la valeur que j'ai donnée pour l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{\left[g^2t+h^2(1-t)+ct(1-t)\right]^{\mu+1}}.$$

Réciproquement la valeur de cette intégrale, prise même dans toute sa généralité, c'est-à-dire en y supposant μ soumis à la seule restriction que $\mu+\frac{1}{2}$ soit positif ou à partie réelle positive, pourrait se conclure de la formule de M. Thomson une fois admise et combinée avec le calcul par lequel j'ai réduit l'intégrale multiple qu'elle exprime à une intégrale simple. Il semble, il est vrai, au premier coup d'œil, qu'on ne puisse traiter ainsi que le cas de $\mu=\frac{n}{2}-1$, n étant un nombre entier; mais on passe de là, et même d'un cas particulier quelconque, au cas général, en différentiant à indices quelconques par rapport à c. La méthode est donc complète; mais elle est longue et peu naturelle: néanmoins c'est ainsi, je dois l'avouer, que j'ai d'abord procédé.

Ici vient s'offrir à nous une méthode nouvelle, et que l'on croira d'abord très-facile, pour la détermination de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{\left[g^2t+h^2(1-t)+ct(1-t)\right]^{\mu+1}}.$$

Puisque le calcul des différentielles à indices quelconques mene de suite d'un cas particulier pris à volonté au cas général, il suffirait d'avoir la valeur de notre intégrale pour $\mu = 0$, par exemple : en d'autres termes, il suffira de prouver que l'on a

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\,.\,dt}{[g^2 t + h^2(1-t) + ct(1-t)]\sqrt{1-t}} = \frac{\pi}{g\sqrt{c + (g+h)^2}}.$$

puis de différentier par rapport à c. Or l'intégration, même indéfinie, peut alors s'effectuer; elle s'effectuerait aussi pour $\mu = \frac{1}{2}$ et dans une infinité d'autres cas. Je doute pourtant que ceux qui essayeront de ces calculs les jugent préférables à la méthode que j'ai suivie dans le cahier de novembre.

Si l'on ne rencontrait pas si souvent, sans la chercher, la formule de Legendre et de Gauss

$$\Gamma(\rho)\,\Gamma\left(\rho + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2\rho}\,.\,\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(2\rho),$$

je ferais observer qu'elle se déduit de l'équation

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt}{[g^2 t + h^2(1-t) + ct(1-t)]^{\mu+1}} = \frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{g\,.\,\Gamma(\mu+1)\,.\,[c+(g+h)^2]^{\nu+\frac{1}{2}}}.$$

Prenez en effet $g = h = 1$ et $c = 0$; cette équation vous donnera

$$\int_0^1 t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{2^{2\mu+1}\,\Gamma(\mu+1)};$$

or le premier membre est égal à

$$\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\mu+2)};$$

substituant cette valeur et simplifiant, on en conclut

$$\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)=2^{1-2(\mu+1)}\,\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(2\mu+2),$$

et par suite, en posant $\mu=\rho-1$, on tombe sur la formule citée.

FIN DU TOME PREMIER (2^{e} SÉRIE).

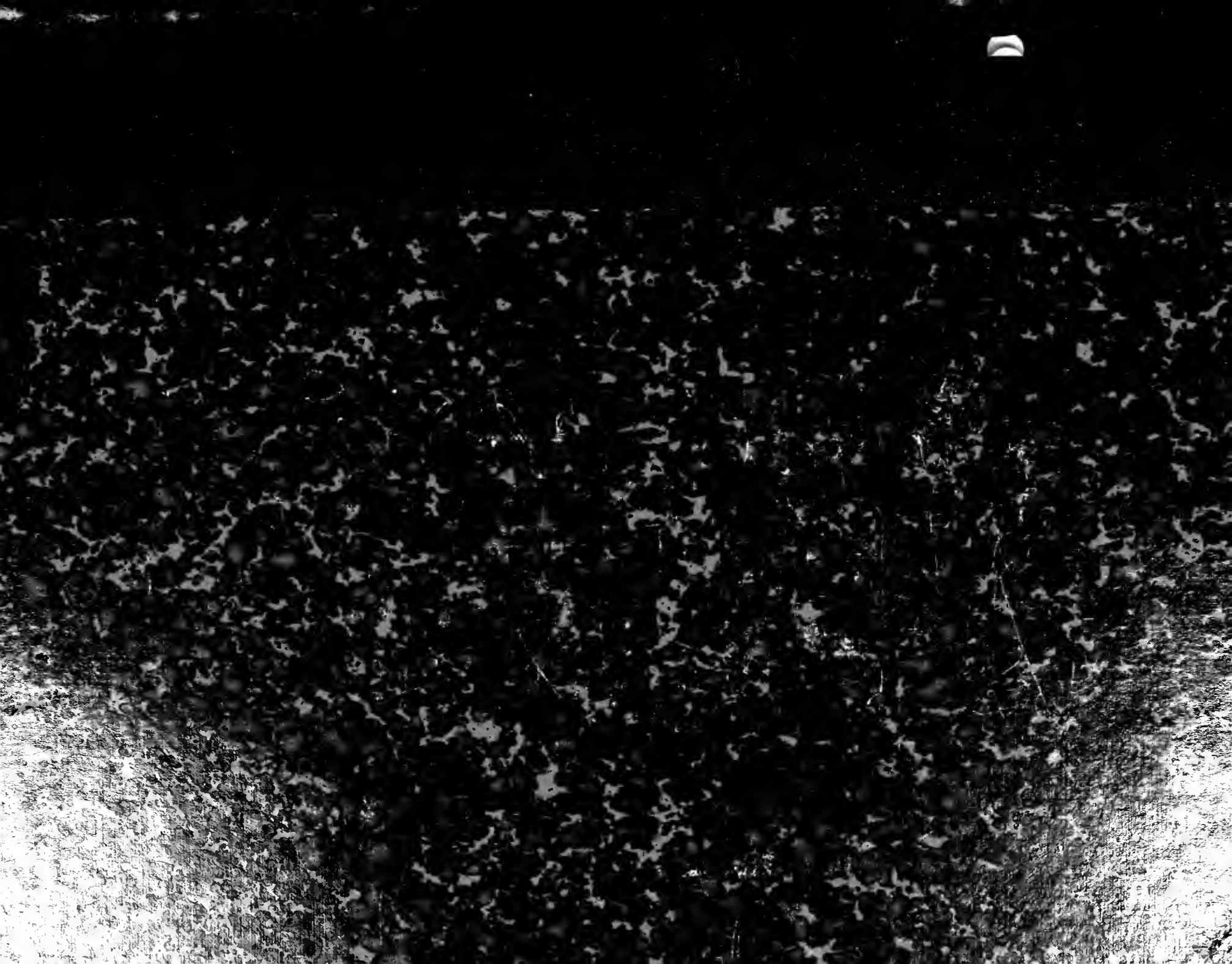
PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

QA
1
J684
sér.2
t.1

Physical &
Applied Sci.

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY